PROGRAMA IME ESPECIAL – ANÁLISE COMBINATÓRIA – PROF. PAULO ROBERTO

01. Em um baile há seis rapazes e dez moças. Quantos pares podem ser formados para a dança:
a) sem restrição;
b) se Lúcia e Célia se recusam a dançar tanto com Manoel como com Cláudio, e Haroldo não quer dançar com Célia nem com Ana?

Resp.: a) 60; b) 54

02. Quantos números inteiros maiores que 53000, com algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Resp.: 90360

03. Uma bandeira é formada de sete listras que devem ser pintadas de três cores diferentes. De quantas maneiras distintas será possível pintá-la de modo que duas listras adjacentes nunca estejam pintadas da mesma cor?

Resp.: 192

04. (IME) Quantos números de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Resp.: 300

05. Um carro de montanha russa é formado por dez bancos de dois lugares cada um. De quantos modos dez casai se podem sentar nesse carro?

Resp.: 3628800 x 2^{10}

06. De quantos modos podemos distribuir dez cartas de um baralho a dois parceiros, podendo eles receber quantidades desiguais de cartas, sendo que cada um deve receber ao menos uma carta?

Resp.: 1022

07. Quantos embrulhos é possível formar com cinco livros de Matemática, três de Física e dois de Química, não sendo diferentes os livros da mesma matéria?

Resp.: 71

08. Prove que $1!1 + 2!2 + 3!3 + \ldots + n!n = (n+1)! - 1$

09. Formam-se todos os números de seis algarismos, sem os repetir, com os algarismos do número 786.415. Colocando-se em ordem crescente, qual a posição do número dado?

Resp.: 597º

10. De quantos modos n pessoas podem sentar-se em n cadeiras enfileiradas:
a) sem restrições;
b) ficando A e B sempre juntas?
c) sem que A e B fiquem juntas?
d) ficando A, B e C juntas?
e) ficando A, B e C juntas, e D e E separadas uma da outra?

Resp.: a) n!; b) 2 . (n – 1)!; c) (n – 2) . (n – 1)! d) 6 . (n – 2)!; e) 6 . (n –4) . (n – 3)!

11. Em uma urna há 2n bolas, numeradas de 1 a 2n. Sacam-se, uma a uma, todas as bolas da urna.
a) de quantos modos se pode esvaziar a urna?
b) quantos são os casos em que os k últimos números $(k < 2n)$ aparecem nas k últimas sacadas?
c) quantos são os casos em que as bolas de números ímpar aparecem nas sacadas de ordem par?

Resp.: a) (2n)!; b) $(2n-k)!\,.\,k!$; c) $(n!)^2$

12. Determine o número de anagramas da palavra CAPÍTULO que não possuem vogais e nem consoantes juntas.

Resp.: 1152

13. De quantos modos se pode iluminar uma sala com n lâmpadas?

Resp.: $2^n - 1$

14. De quantos modos se pode dispor doze objetos distintos em três grupos de quatro objetos?

Resp.: 5775

15. Calcular o número de divisores positivos do número $N = 2^3\ .\ 3\ .\ 5^2\ .\ 7^4$.

Resp.: 120

16. Em um congresso de professores há 30 professores de Física e 30 de Matemática. Quantos comissões de oito professores podem ser formadas:
a) sem restrições;
b) havendo pelo menos três professores de Física e três de Matemática?

Resp.: a) C_{60}^{8}; b) $2\ .\ C_{30}^{3}\ .\ C_{30}^{5} + \left(C_{30}^{4}\right)^2$

17. Dados n pontos distintos de uma circunferência, quantos são os polígonos que podemos formar, <u>convexos</u>, cujos vértices são escolhidos entre esses pontos?

Resp.: $2^n - \left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2\right)$

18. Quantas diagonais possui o dodecaedro regular?

Resp.: 100

19. Dados n pontos de um plano, não havendo 3 colineares, quantos são:
a) os segmentos de reta cujas extremidades são escolhidas entre esses pontos?
b) os triângulos cujos vértices são escolhidos entre esses pontos?
c) os quadriláteros cujos vértices são escolhidos entre esses pontos?
d) os polígonos de n lados cujos vértices são esses pontos?
e) no máximo, os pontos de interseção das retas formadas por esses pontos, excluindo-se desse número os n pontos dados?

Resp.: a) C_n^2; b) C_n^3; c) 3 C_n^4; d) $\frac{(n-1)!}{2}$; e) 3 C_n^4

20. Dados 7 pontos distintos de uma circunferência, quantos são os polígonos que podemos formar cujos vértices são escolhidos entre esses pontos?

Resp.: 1172

21. São dados $n > 4$ pontos coplanares, dos quais $k > 1$ estão sobre uma reta r $(4 + k \le n)$, e entre os demais não há 3 alinhados entre si. Pede-se:
a) o total de triângulos que podem ser formados com vértices nesses pontos;
b) o total de quadriláteros com vértices nos pontos dados.

Resp.: a) $(n-k)C_k^2 + k\,C_{n-k}^2 + C_{n-k}^3 (= C_k^3 - C_k^3 \text{ para } k \ge 3)$; b) $3\left[C_{n-k}^4 + kC_{n-k}^3 + C_k^2 C_{n-k}^2\right]$

22. São dados $m > 1$ pontos distintos sobre uma reta r, e $k > 1$ pontos distintos sobre a reta s paralela a r.
a) quantos triângulos podem ser formados com vértices nestes pontos?
b) quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices nestes pontos?

Resp.: a) $mC_k^2 + k\,C_m^2$; b) $C_k^2 \,.\, C_m^2$

23. Um total de 28 apertos de mão foram trocados no fim de uma festa. Sabendo que cada pessoa cumprimentou todas as outras, pergunta-se o número de pessoas presentes à festa.

Resp.: 8

24. Das letras do alfabeto, quantos subconjuntos de três letras existem, de modo que duas letras quaisquer de cada subconjunto não sejam consecutivos no alfabeto?

Resp.: 2024

25. (IME) Se $C_{n+2}^5 = \frac{28}{3} n$, calcule n.

Resp.: 6

26. De quantos modos se pode preencher um cartão da loteria esportiva (13 jogos) com:
a) 13 palpites simples;
b) 2 palpites duplos e 11 simples;
c) 3 palpites triplos e 10 simples;
d) 3 palpites duplos, 2 triplos e 8 simples?

Resp.: a) 3^{13}; b) $C_{13}^2 \,.\, 3^{13}$; c) $C_{13}^3 \,.\, 3^{10}$; d) $C_{13}^3 \,.\, C_{10}^2 \,.\, 3^{11}$

27. Num jogo de pôquer, usa-se um baralho de 32 cartas, distribuindo-se cinco cartas a cada um dos quatro parceiros. Quantas distribuições diferentes podem ocorrer?

Resp.: $\frac{32!}{12!(5!)^4}$

28. Considere a palavra MARACUJÁ.

a) Quantos anagramas tem esta palavra?
b) Destes, quantos não possuem vogais e nem consoantes juntas?
c) Quantas não possuem vogais juntas?

Resp.: a) 6720; b) 192; c) 480

29. Em uma urna há seis bolas brancas e quatro bolas verdes. De quantos modos se pode extrair as dez bolas da urna, sendo uma de cada vez?

Resp.: 210

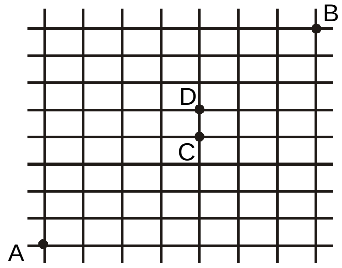
30. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI que não possuem duas letras iguais a I juntas?

Resp.: 1050

31. De quantos modos diferentes podem ser colocados em fila $m+h$ pessoas, sendo m mulheres de alturas diferentes e h homens também de alturas diferentes, de modo que as pessoas do mesmo sexo fiquem em ordem crescente de altura?

Resp.: $\dfrac{(m+h)!}{m!\ h!}$

32. A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo oito verticais.



Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B:
a) sem restrições?
b) sem passar por C?
c) sem passar por C ou D?
d) sem passar por C nem D?

Resp.: a) 6435; b) 3985; c) 5035; d) 2865

33. De quantos modos podemos dispor em fila dez letras iguais a A, seis iguais a B e cinco iguais a C, sem que duas letras iguais a B fiquem juntas?

Resp.: $C_{16}^{6}\ .\ P_{15}^{(10,5)}$

34. De quantos modos sete crianças podem brincar de roda:
a) sem restrições?
b) de modo que João e Maria, que são duas crianças, fiquem sempre juntas?

Resp.: a) $6!=720$; b) $2\ .\ 5!=240$

35. De quantos modos seis casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular:

a) não sentando juntos dois homens?;
b) não sentando juntos dois homens, mas cada homem sentando ao lado de sua esposa?;
c) não sentando juntos dois homens e nem um homem com sua esposa?

Resp.: a) $P_5 \,.\, P_6 = 5!6! = 86400$; b) $P_5 \,.\, 2 = 240$; c) $80 \,.\, 5!$

36. De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular, usando seis cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

Resp.: $6 \,.\, P_4 = 144$

37. De quantos modos se pode pintar um prisma pentagonal regular, usando sete cores diferentes, sendo cada face com uma cor?

Resp.: $C_7^2 \,.\, P_4 = 504$

38. (ITA) De quantos modos se pode pintar um cubo, usando seis cores diferentes, sendo cada face com uma cor?

Resp.: $5 \,.\, P_3 = 30$

39. Idem para um:
a) tetraedro regular, com 4 cores diferentes;
b) octaedro regular, com 8 cores diferentes;
c) dodecaedro regular, com 12 cores diferentes;
d) icosaedro regular, com 20 cores diferentes.

Resp.: a) $P_2 = 2$; b) $7 \,.\, C_6^3 \,.\, P_2 \,.\, P_3 = 1680$; c) $11 \,.\, C_{10}^5 \,.\, P_4 \,.\, P_5 = \frac{11!}{5}$; d) $19 \,.\, C_{18}^3 \,.\, C_{15}^3 \,.\, C_{12}^6 \,.\, P_2 \,.\, P_6 \,.\, P_6 \,.\, P_3 = \frac{19!}{3}$

40. Dada a equação $x + y + z = 20$:
a) quantas são as soluções inteiras positivas?;
b) quantas são as soluções inteiras não negativas?

Resp.: a) $C_{19}^2 = 171$; b) $C_{22}^2 = 231$

41. Calcular o número de soluções inteiras não negativas da inequação $x + y + z < 5$.

Resp.: $C_6^2 + C_5^2 + C_4^2 + C_3^2 + C_2^2 = 35$

42. Quantas soluções inteiras da equação $x + y + z + w = 48$ existem, satisfazendo as condições $x > 5$, $y > 6$, $z > 7$ e $w > 8$?

Resp.: 1330

43. Calcule o número de soluções inteiras maiores que –4 da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Resp.: 560

44. De quantos modos se pode comprar 5 maços de cigarro em um bar que só vende 4 marcas diferentes?

Resp.: 56

45. Uma sorveteria tem sorvetes de 11 sabores diferentes. De quantos modos uma pessoa pode escolher 6 sorvetes, não necessariamente de sabores diferentes?

Resp.: $C_{16}^{10} = 8008$

46. Reduzidos os termos semelhantes, quantos termos existem no desenvolvimento de $(a+b+c+d+e)^{17}$?

Resp.: $C_{21}^{4} = 5985$

47. Quantos números inteiros entre 1 e $1000\,000$ têm soma dos algarismos igual a 5? E soma menor do que 5?

Resp.: 252; 208

48. Resolver:

a) $C_x^{x-2} + A_x^2 = (AR)_x^2$;

b) $(CR)_x^y = C_m^p$;

c) $\dfrac{C_{m+3}^{m-2}}{(CR)_8^{m-2}} = \dfrac{7}{15}$;

d) $C_{16}^{3x-2} = C_{16}^{x+2}$.

Resp.: a) $x = 3$; b) $\begin{cases} x = p+1 \\ y = m-p \end{cases}$; c) $m = 5$; d) $x = 2$ ou $x = 4$.

Material cedido pelo Professor André Aguiar
Sistema Elite de Ensino – Vila dos Cabanos – PA