PROGRAMA IME ESPECIAL – 1991 – GEOMETRIA ESPACIAL – PROF. PAULO ROBERTO

01. (IME-64) Um cone circular reto, de raio da base igual a “R” e altura “h”, está circunscrito a uma esfera de raio “r”. Provar que $\frac{2}{rh} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}$.

02. (IME-64) Um tronco de cone de resolução, de bases paralelas, tem a sua geratriz igual à soma dos raios das suas bases. Sabendo-se que a sua área lateral é igual a $66{,}56\ cm^2$, e que a sua altura é de $4\ cm$, calcular o seu volume. Considerar $\pi = 3{,}14$.

Resp.: $72\ cm^3$.

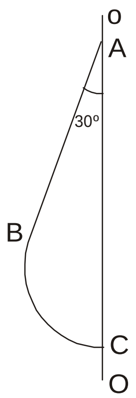
03. (IME-64) Um cubo, de área total igual a $24\ m^2$, é cortado por um plano de modo a se obter uma seção hexagonal regular. Calcule o lado do quadrado inscrito no triângulo equilátero de perímetro igual ao do hexáGONO OBTIDO.

Resp.: $4\sqrt{3}/(2\sqrt{2}+\sqrt{6})\ cm = 2(2\sqrt{6}-3\sqrt{3})\ cm$.

04. (IME-65) Um cone equilátero está inscrito em uma esfera de raio $R = 6$. Deseja-se cortar os dois sólidos por um plano paralelo à base do cone, de tal forma que a diferença entre as áreas das seções obtidas seja igual a 2π. Qual a menor distância do vértice do cone a que deve passar este plano?

Resp.: $(9-5\sqrt{3})/2$.

05. (IME-65) Na linha plana ABC da figura, o segmento de reta $\overline{AB}$ e o arco de circunferência $\overline{BC}$ concordam em B. Em função de $\overline{AC} = \ell$, determinar a área total do sólido gerado pela revolução da linha ABC em torno do eixo $\overline{OO'}$ eo volume, máximo, de um octaedro que tem vértices em A e C e os outros sobre a circunferência gerada pela revolução de B em torno do mesmo eixo.



Resp.: a) $\frac{\pi\ell^2}{2}$ u.a; b) $\frac{\ell^3}{18}$ u. v.

06. (IME-65) Em um trapézio isósceles de área $A_1 = 5$ está inscrito um círculo de área $A_2 = \pi$. Um sólido de revolução é gerado pela rotação do trapézio em torno de um eixo perpendicular às suas bases, contido no plano da figura, e afastado do vértice mas próximo de uma distância igual ao comprimento da base maior. Calcular a área total e o volume deste sólido de revolução.

Resp.: $A = 120\ \pi$ u . a; $V = 60\ \pi$ u. v.

07. (IME-66) O volume de uma cunha esférica é igual ao volume do cubo inscrito na mesma esfera. Calcular o ângulo da cunha.

Resp.: $4\sqrt{3}/3$ rad.

08. (IME-66) Um cilindro é circunscrito a uma esfera de raio R. Um cone é circunscrito a esse cilindro de modo que sua altura seja 4R. Calcular a relação entre a área lateral do cone e aq área da esfera.

Resp.: $\sqrt{5}$.

09. (IME-66) Inscreve-se um cilindro circular reto numa esfera. Calcular o raio da esfera. Sabendo que a altura do cilindro é 4 m e que a relação entre o raio da base e o raio da esfera é $\sqrt{3}/2$.

Resp.: 4 m.

10. (IME-66) Pela diagonal de uma das faces de um cubo de aresta igual a 6 m faz-se passar um plano que forma com esta face um diedro de $\text{arc tg}\ \sqrt{2}$. Calcular os volumes dos sólidos em que fica decomposto o cubo.

Resp.: $36\ m^3$ e $180\ m^3$.

11. (IME-66) Um cone de 27 cm de raio e 36 cm de altura tem o vértice no centro de uma esfera de 35 cm de raio. Calcular o volume da porção de espaço comum aos dois sólidos.

Resp.: $2 \,.\, 5^2 \,.\, 7^3\ \pi/3\ cm^3$.

12. (IME-66) Quatro esferas de raio R são tangentes entre si e três delas estão apoiadas num plano horizontal. A altura do centro da esfera mais alta referida a esse plano é 26,32 cm. Calcular o raio das esferas.

Resp.: 10 cm.

13. (IME-67) Um prisma A, um prisma B, e uma pirâmide C têm ao todo 32 arestas. Sabendo-se que A tem mais arestas que B, dizer o número de lados da base de cada sólido.

Resp. A:5; B:3; C:4.

14. (IME-67) O volume de um tronco de pirâmide vale $950\ cm^3$ e sua altura é de 9 cm. A base maior é um triângulo retângulo cuja altura é 12 cm e cujo perímetro é 60 cm. Calcular:

a) O volume da pirâmide da qual se derivou o tronco.
b) A área da base menor do tronco de pirâmide.

Resp.: a) $1350\ \text{cm}^3$; b) $\dfrac{200}{3}\ \text{cm}^2$.

15. (IME-68) Dado um prisma reto cuja base é um quadrado de lado $10\ \text{m}$ e altura $18\ \text{m}$; passa-se um plano que corta o prisma de modo a que três arestas consecutivas ficam medindo $10\ \text{m}$, $12\ \text{m}$ e $14\ \text{m}$. Calcular, em metros quadrados, a área lateral do prisma truncado assim formado.

Resp.: $480\ \text{m}^2$.

16. (IME-68) Consideram-se três esferas tangentes a um plano P em três pontos A, B, C, e tangentes duas a duas. Calcular os raios x, y, z das esferas em função das distâncias mútuas a, b, c dos três pontos A, B, C.

Resp.: $x = \dfrac{bc}{2a}$; $y = \dfrac{ac}{2b}$; $z = \dfrac{ab}{2c}$.

17. (IME-68) Corta-se um cubo de aresta a por 8 planos que passam, cada um, pelo meio das arestas que chegam a cada vértice. Considera-se o sólido S que resta, se retirados os 8 tetraedros obtidos. No mesmo sólido S, inscreve-se um octaedro P que tem por vértices os centros das faces do cubo original. Calcular a relação entre os volumes dos sólidos S e P.

Resp.: 5.

18. (IME-68) Calcular o raio das esferas circunscrita e inscrita a uma pirâmide regular que tem por altura h e por base um quadrado de lado a.

Resp.: $(2h^2 + a^2)/4h$; $r = ah/(a + \sqrt{4h^2 + a^2})$.

19. (IME-85/86) Seja um paralelepípedo retângulo de bases ABCD e A'B'C'D', cujas arestas AA', BB', CC' e DD' tenham por comprimento h e os lados da base sejam, respectivamente, $AB = a$ e $AD = b$. Por DD' considere dois planos DD'MM' e DD'NN'.

1º) Determine as distâncias $AM = x$ e $CN = y$, para que esses dois planos dividam o paralelepípedo em três partes do mesmo volume.
2º) Determine a razão entre os volumes dos sólidos MBNM'B'N' e MBNM'D'N'.
3º) Encontre a relação entre a e b, que estabeleça a condição necessária e suficiente para que o diedro de arestas MM', cujas faces passam por DD' e NN', seja reto.

Resp.: 1º) $x = \dfrac{2a}{3}$; $y = \dfrac{2b}{3}$; 2º) $\dfrac{1}{5}$; 3º) $\sqrt{3}b = \sqrt{2}a$.

20. (IME-85/86) Seja um triângulo ABC, retângulo em A. Por B, traça-se uma reta perpendicular ao plano do triângulo. Sobre esta, fixa-se no ponto S. Por B, passa-se um plano que intercepta SC em C' e é perpendicular a SC. O plano corta SA em A'. Demonstre que os cinco pontos A, B, C, A' e C' pertencem a uma mesma esfera.

21. (IME-85/86) Dadas duas esferas de raios respectivamente iguais a R e r, tangentes exteriores, e um cone circunscrito a elas, calcule a área da superfície lateral do tronco de cone que tenha por bases os círculos de contato das esferas com o cone.

Resp.: $4\pi\ Rr$.

22. (IME-85/86) Dado um tronco de pirâmide triangular de bases paralelas, demonstre que as retas que ligam os vértices da base inferior aos pontos médios dos lados opostos da base superior são concorrentes.

23. (IME-86/87) Num plano π tem-se um retângulo ABCD de dimensões $AB = 2a$ e $AD = a$. Consideram-se a superfície prismática, cujas arestas são as retas perpendiculares a π, passando por A, B, C, D e um ponto C', sobre a aresta traçada por C, tal que $CC' = b$.
Seccionando-se esta superfície por um plano passando por AC'.

a) Mostre que é possível obter-se para seção plana um losango AB'C'D', onde B' e D' são pontos das arestas que passem respectivamente por B e D.
b) Determine, em função de a e b, uma condição necessária e suficiente para que o losango esteja situado em um mesmo semi-espaço em relação ao plano π.
c) Calcule o volume do tronco de prisma ABCDB'C'D', supondo satisfeitas as condições do item anterior.

Resp.: b) $b > \sqrt{3}\,a$; c) $a^2 b$.

24. (IME-86/87) Dada uma pirâmide hexagonal regular de vértice V e base ABCDEF, de lado da base igual a ℓ e altura h.

a) Mostre que existem duas esferas tangentes aos planos das faces dessa pirâmide.
b) Calcule os raios dessas esferas.
c) Mostre que o produto desses raios independe de h.

Resp.: b) $r = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell}{h} \cdot (\sqrt{4h^2 + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell)$; $r' = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\ell}{h} \cdot (\sqrt{4h^2 + 3\ell^2} - \sqrt{3}\ell)$; c) $r \cdot r' = 3\ell^2 / 4$.

25. (IME-86/87) Sejam duas retas ortogonais r e r', não coplanares. Considere sobre r dois pontos fixos A e B e sobre r' dois pontos variáveis M e M', tais que a projeção de M' sobre o plano que contém o triângulo MAB é o ortocentro H deste triângulo.
Determine o lugar geométrico dos centros das esferas circunscritas ao tetraedro ABMM'.

26. (IME-87/88) Secciona-se um cubo de aresta a por planos passando pelos pontos médios das arestas concorrentes em cada vértice. Considere o sólido formado ao retirar-se as oito pirâmides obtidas. Calcule a soma das arestas, a área e o volume deste sólido.

Resp.: $12\sqrt{2}\ a$; $(3 + \sqrt{3})\,a^2$; $5a^3/6$.

27. (IME-87/88) Considere um semicírculo de diâmetro $AB = 2R$. Por A, traça-se uma reta que forma um ângulo de 30º com o diâmetro AB e que corta o semicírculo em C. Por C, traça-se a tangente ao semicírculo, que intercepta a reta que contém AB no ponto D. Fazendo-se uma rotação em torno da reta que contém AB, o semicírculo gera uma esfera E o triângulo ACD gera um sólido S.

a) Calcule o volume deste sólido S, em função do raio R.
b) Seja M um ponto sobre AB tal que $AM = \frac{R}{3}$. Considere um plano π passando por M e perpendicular à reta AB, seccionando a esfera E e o sólido S. Calcule a razão entre as áreas destas duas seções.

Resp.: 15.

28. (IME-87/88) Dadas duas retas reversas r e s, ortogonais e sua perpendicular comum t, que corta r em I e S em K; considere um segmento AB, de comprimento constante, que se move apoiando suas extremidades A e B, respectivamente sobre r e s. Unindo-se A a K e I a B, forma-se um tetraedro variável ABIK.
a) Demonstre que a soma dos quadrados das arestas deste tetraedro é constante.
b) Calcule o raio da esfera circunscrita ao tetraedro, em função da distância AB.

Resp.: b) $\frac{AB}{2}$.

29. (IME-87/88) Considere as esferas cuja interseção com um plano π é um círculo fixo C. Seja r uma reta do plano π, exterior ao círculo. Determine o lugar geométrico dos pontos de contato dos planos tangentes a tais esferas e que contêm a reta r.

30. (IME-88/89) Mostre que a área total do cilindro equilátero inscrito em uma esfera é média geométrica entre a área da esfera e a área total do cone equilátero inscrito nessa esfera.

31. (IME-88/89) Seja ABC um triângulo retângulo isósceles, com $AB = AC = a$. Sejam BB' e CC' dois segmentos de comprimento a, perpendiculares ao plano ABC e situados no mesmo semi-espaço, em relação a este plano.
a) calcule a área total da pirâmide de vértice A e base BCC'B';
b) calcule o volume desta pirâmide;
c) mostre que os pontos A, B, C, C' e B' pertencem a uma esfera;
d) determine o centro e o raio desta esfera.

Resp.: a) $(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})\ a^2/2$; b) $\frac{a^3}{3}$; d) O centro da esfera é o centro do retângulo B'B'C'C, e o raio é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

32. (IME-88/89) Seja ABCD um tetraedro regular de aresta a. Seja O o baricentro da face ABC. Efetua-se uma translação do tetraedro igual a $\frac{\overrightarrow{AO}}{2}$ obtendo-se um novo tetraedro A'B'C'D'.
a) Determine o volume da esfera inscrita no sólido comum aos tetraedros ABCD e A'B'C'D'.
b) Determine o volume da esfera circunscrita a este sólido.

Resp.: a) $\sqrt{6}\pi a^3/729$; b) $\sqrt{6}\pi a^3/27$.

33. (IME-89/90) Considere uma esfera de raio R. Determine a figura geométrica à qual pertence o lugar geométrico dos vértices dos triedos nos quais as três arestas estão tangentes a essa esfera e formam, duas a duas, ângulos de 60º.

Resp.: Superfície esférica concêntrica com a esfera dada e de raio $R\sqrt{3}$.

34. (IME-89/90) Dois círculos de raio R e r são, ao mesmo tempo, bases de um tronco de cone e bases de dois cones opostos de mesmo vértice e mesmo eixo. Seja K a razão entre o volume do tronco e a soma dos volumes dos dois cones opostos e seja m a razão $\frac{R}{r}$. Determine m em função de K.

Resp.: $m = \dfrac{K + 1 \pm \sqrt{-3K^2 + 10K - 3}}{2(K-1)}$.

35. (IME-89/90) Seja um segmento fixo OA de comprimento a e uma semi-reta variável Ox, tal que $A\hat{O}x = \alpha$, α ângulo agudo, pertencentes a um plano fixo π. Seja a perpendicular ao plano π em A e seja B pertencente a esta perpendicular tal que $AB = a$. Seja C o pé da perpendicular traçada de B sobre Ox. Pedidos:
a) Qual a propriedade comum a todas as faces do tetraedro OABC?
b) Calcule o comprimento das seis arestas de OABC em função de a e α.
c) Calcule o volume v do tetraedro em função de a e α.
d) Determine o volume comum aos dois sólidos concentradas no item anterior.

Resp.: a) Todas as faces são Δ's retângulos; b) $OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$, $OC = a \cos \alpha$, $AB = a$, $AC = a \operatorname{sen} \alpha$, $BC = a\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha}$; c) $(a^3 \operatorname{sen} 2\alpha)/12$; d) 30º ou 60º; e) $a^3\sqrt{3}/36$.

36. (IME-90/91) Sejam dois quadrados ABCD e ABEF, tendo um lado comum AB, mas não situados num mesmo plano. Sejam M e N pertencentes, respectivamente, às diagonais AC e BF tais que $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{1}{3}$. Mostre que MN é paralelo a DE.

37. (IME-90/91) Seja um cone reto de base circular, vértice V, altura h e raio da base r e seja ABC um triângulo equilátero circunscrito à base do cone. Pede-se:
a) Determinar a relação entre h e r para que o tetraedro, com vértices VABC, seja regular.
b) Satisfeitas essas condições, calcule, em função de r, o volume limitado pela superfície do cone, pelo plano de sua base e pelos dois planos tangentes que passam pela aresta VA.

Resp.: a) $h = 2\sqrt{2}\ r$; b) $2^3(3\sqrt{3} - \sqrt{2}\pi)/9$.

38. (IME-90/91) Seja, sobre uma esfera, um círculo máximo (C) com diâmetro $\overline{AB} = 2R$. Traçam-se: uma corda $\overline{MN}$ do círculo (C), paralela a AB, e duas retas x e y perpendiculares ao plano do círculo de diâmetro $\overline{AB}$ e passando, respectivamente, por M e N. Os planos definidos pelo ponto A e a reta x e o definido pelo ponto A e a reta y cortam a esfera segundo dois círculos. Mostre que quando MN varia, mantendo-se paralela a AB, a soma dos quadrados de seus raios é constante.

Material cedido pelo Professor André Aguiar
Sistema Elite de Ensino – Vila dos Cabanos – PA