EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA PLANA – REVISÃO – 1991 – PROF. PAULO ROBERTO

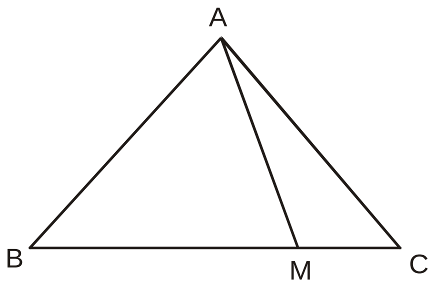
01. (IME-64) Uma corda corta o diâmetro de um círculo segundo um ângulo de 45º. Demonstrar que a soma do quadrado dos segmentos aditivos “m” e “n”, com que a corda fica dividida, é igual ao dobro do quadrado do raio do círculo.

02. (IME-64) Prolonga-se o raio AO de um círculo, de um comprimento $AB = OA$; traça-se uma tangente ao círculo, sobre a qual se levantam as perpendiculares AN e BC. Supondo que o ângulo $O\hat{A}C = 126^{o}$, qual o valor do ângulo $A\hat{O}B$?

Resp.: 42º.

03. (IME-64) Provar que, em qualquer trapézio, a soma do quadrado das diagonais é igual à soma do quadrado do lado não paralelo mais o dobro do produto das bases.

04. (IME-65) $\overline{AB} = \overline{AC} \neq \overline{BC}$. Expressar a diferença $\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2$ em função dos segmentos aditivos da base.



Resp.: $\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = \overline{BM} \,.\, \overline{MC}$.

05. (IME-65) Dividida a área de um círculo de raio R, em n partes equivalentes, por meio de circunferências concêntricas de raios r_1, r_2, r_3, ..., r_i, ..., r_{n-1}, estabelecer o valor de r_i em função de R, n e i.

Resp.: $R\sqrt{i;n}$.

06. (IME-65) Sobre uma circunferência tomou-se um ponto qualquer A. A partir desse ponto, traçam-se retas secantes, tendo como comprimento o dobro das respectivas cordas. Definir, provando, o lugar geométrico das extremidades das retas assim construídas.

Resp.: Circunferência.

07. (IME-65) Dado o trapézio de bases $b = 20$, $B = 30$ e lados $a = 12$, $c = 10$, dividir a área desse trapézio por uma reta paralela às bases, de modo que as áreas resultantes sejam proporcionais a 3 e 7, sendo B a base da área maior. Calcular a distância y da reta divisora à base menor b.

Resp.: $\frac{24}{5}(\sqrt{22} - 4)$.

08. (IME-66) Por um ponto distante $7\ \text{cm}$ do centro de uma circunferência de $5\ \text{cm}$ de raio traça-se uma secante de modo que sua parte externa é 2/3 da secante total. Calcular o comprimento da secante.

Resp.: $6\ \text{cm}$.

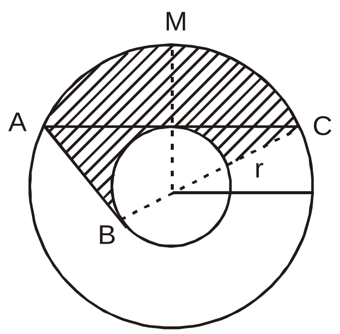
09. (IME-66) Em um círculo de $10\sqrt{2}\ \text{cm}$ de diâmetro temos duas cordas de $2\ \text{cm}$ e $10\ \text{cm}$. Achar a corda do arco soma dos arcos das cordas anteriores.

Resp.: $8\sqrt{2}\ \text{cm}$.

10. (IME-66) Determinar a bissetriz do ângulo maior de um triângulo cujo perímetro é $38\ \text{m}$ e cujos lados são proporcionais a 4,6 e 9.

Resp.: $2\sqrt{114}/5$.

11. (IME-67) Na figura abaixo, AB e AC são tangentes ao círculo menor. Determinar, em função de r, a área da parte hachurada.



Resp.: πr^2.

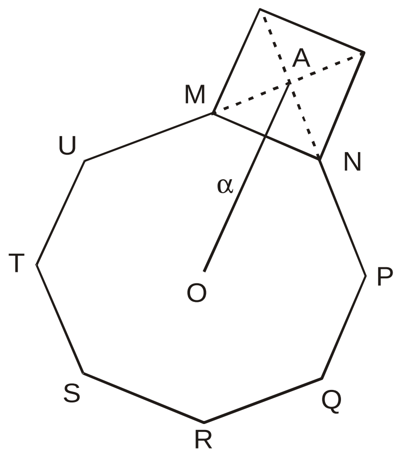
12. (IME-67) Determinar, justificando sucintamente, o número de polígonos convexos ou estrelados, regulares, não semelhantes, que se pode construir com 15 lados.

Resp.: 4.

13. (IME-67) Um trapézio de vértices ABCD está inscrito em um círculo, de raio R, sendo $AB = R$ e $CD = 2R$ e sendo BC e AD lados não paralelos. Traçam-se as bissetrizes dos ângulos internos do trapézio, de modo que a bissetriz de $\hat{A}$ intercepta a de $\hat{D}$ no ponto Q, a da $\hat{B}$ intercepta a de $\hat{C}$ no ponto N e a de $\hat{C}$ intercepta a de $\hat{D}$ no ponto M. Sabendo que os pontos M, N e Q são interiores ao trapézio ABCD e que o ponto P é a interseção das bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, determine a relação entre as áreas dos polígonos MNPQ e ABCD.

Resp.: 1/9.

14. (IME-67) A figura mostra o octógono regular MNPQRSTU, e um quadrado construído tendo por base o lado MN.



Sabendo-se que a distância entre o centro do círculo inscrito no octógono e o ponto de interseção das diagonais do quadrado é a, determinar a área do quadrado em função de a.

Resp.: $2a^2(3-2\sqrt{2})$.

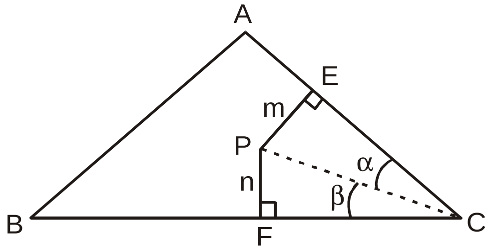
15. (IME-67) Dois círculos exteriores possuem diâmetros de $10\ \text{m}$ e $2\ \text{m}$ e seu eixo radical dista $5\ \text{m}$ do centro de um deles. Pede-se:

a) O comprimento da tangente comum externa dos 2 círculos;
b) Sendo P o ponto em que o eixo radical corta a tangente comum externa e O e O' os centros dos círculos, determinar a área do triângulo POO'.

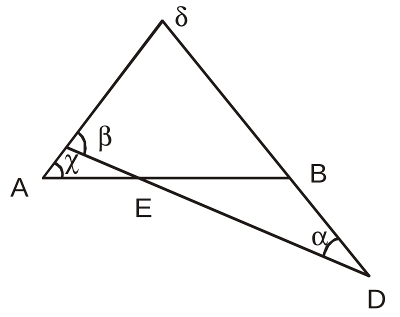
Resp.: a) $8\sqrt{2}\ \text{m}$; b) $12\sqrt{2}\ \text{m}^2$.

16. (IME-67) No triângulo abaixo, as distâncias do ponto P aos lados AC e BC são respectivamente m e n. Verificar, justificando, se:

$$CP^2 = (m^2 + n^2 + 2mn\cos C)\operatorname{cosec}^2 C$$



17. (IME-68) Na figura abaixo, sendo $AC = BC$ e $BD = BE$, expressar $\alpha = f(\beta)$.

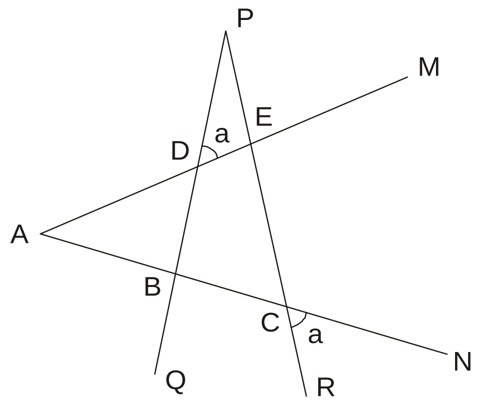


Resp.: $\alpha = \frac{\beta}{3}$.

18. (IME-68) No quadrilátero qualquer ABCD, P é meio de AD e M é meio de BC. Unindo-se P a C e M a A, obtém-se o quadrilátero APCM. Sendo a área de $ABCD = 18\ m^2$, calcular a área de APCM.

Resp.: $9\ m^2$.

19. (IME-68) Os lados dos ângulos MAN e QPR interceptam-se como na figura abaixo.



Sendo $AD = 3$, $AB = 2$, $BC = 4$, pede-se:
a) o valor de DE.
b) dizer, justificadamente, se o quadrilátero BDEC é inscritível.

Resp.: a) 1; b) sim.

20. (IME-68) Dado um triângulo isósceles, cujos lados são números inteiros de metros, sabe-se que os raios dos círculos ex-inscritos têm um produto 16 vezes o raio do círculo inscrito. Determinar os lados do triângulo.

Resp.: 3, 3, 2.

21. (IME-76/77) De um ponto exterior E a um círculo (O) qualquer traçam-se duas tangentes T e t' a esse círculo, sendo os pontos de tangência P e P'. O ângulo $P\hat{E}P'$ mede 140º. De P traça-se a corda PA cujo arco mede 10º no sentido do maior arco PP' sobre o círculo. De A traça-se a corda AB cujo arco mede 70º, no mesmo sentido do arco PA. Pede-se:

a) o ângulo $E\hat{P}P'$;

b) o ângulo $B\hat{P}'E$;

c) o número de lados do polígono inscrito no círculo (O) cujo lado é a corda BP.

Resp.: a) 20º; b) 40º; c) 9.

22. (IME-76/77) Traçam-se dois círculos de raio r e centros em O e O' $(OO' = r)$ que se cortam em I e J. Com centro em I e raio 2r traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em A e (O') em A'. Com centro com 3 e raio 2r, traça-se um arco de círculo que tangencia (O) em B'. Em (O) o diâmetro do tem a outra extremidade em C; em (O') o diâmetro OO' tem a outra extremidade em C'. Os arcos $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{A'C'B'}$, $\overset{\frown}{B'B}$ e $\overset{\frown}{BCA}$ formam uma oval com quatro centros. Pede-se a área desta oval em função de r.

Resp.: $r^2(4\pi - \sqrt{3})/2$.

23. (IME-76/77) Seja ABCD um quadrilátero convexo. Traçam-se as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$, que se denominam respectivamente T_A, T_B, T_C e T_{DC} que determinam os pontos $M = T_A \cap T_B$; $N = T_B \cap T_C$; $P = T_C \cap T_D$; $Q = T_A \cap T_D$. Prova que:

1) O quadrilátero MNPQ é inscritível;
2) As retas AB, CD e NQ são concorrentes em um ponto U, bem como as retas AD, BC e NP em um outro ponto V.

24. (IME-85/86) Dados dois pontos fixos A e B $(\overline{AB} = d)$, considere as elipses passando por B, com foco em A e eixo maior de comprimento 2a, tal que $2a > d$.

1º) Determine o lugar geométrico do segundo foco F dos elipses;
2º) Determine o lugar geométrico dos centros de gravidade dos triângulos ABF.

25. (IME-85/86) Considere um triângulo ABC qualquer e três pontos X, Y e Z tais que $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Considere os círculos (C_1), (C_2) e (C_3) que passam respectivamente pelos pontos CXY, AYZ e BXZ. Demonstre que (C_1), (C_2) e (C_3) se encontram em um ponto W.

26. (IME-85/86)

1º) Demonstre que a diferença entre os quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dobro do produto do terceiro lado pela projeção, sobre ela, da mediana correspondente.
2º) Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros O_1 e O_2 e raios respectivamente iguais a R_1 e R_2, com pontos diametralmente opostos.

27. (IME-85/86) Seja uma parábola de foco F e diretriz d. Por um ponto $P \in d$ traçam-se tangentes à parábola que a interceptam em M_1 e M_2. Demonstre que M_3, M_2 e F estão em linha reta.

28. (IME-86/87) Seja ABCD um quadrilátero circunscritível. Demonstre que os círculos inscritos nos triângulos ABC e ACD têm, com a diagonal AC, um mesmo ponto em comum.

29. (IME-86/87) Sobre uma reta r marcam-se, nesta ordem, os pontos A, B, C e D. Em um dos semiplanos determinados por r, traçam-se ao semi-circunferências de diâmetros AB, CD e AD; no outro semiplano traça-se a semicircunferência de diâmetros BC. Calcule a razão entre a área delimitada por estas semicircunferências e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos médios das semicircunferências. Mostre que esta razão independe dos pontos A, B, C e D.

Resp.: $\frac{\pi}{2}$.

30. (IME-86/87) Seja uma hipérbole equilátera de centro O e focos F e F'. Mostre que o segmento determinado por O e por um ponto M qualquer da hipérbole é média proporcional entre os segmentos MF e MF'.

31. (IME-86/87) Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}\ \hat{C}$ respectivamente e de perímetro 2p, mostre que $a = \dfrac{p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}}$.

32. (IME-86/87) Sejam duas circunferências, não ortogonais, de centros O e O' que se interceptam em A e B. Sendo D e D' os pontos onde as retas O'A e AO interceptam, respectivamente, as circunferências de centro O e O', demonstre que o pentágono BOFF'O' é inscritível.

33. (IME-86/87) Sejam A, B, C, D, E os vértices de um pentágono regular inscrito num círculo e M um ponto qualquer sobre o arco AE. Unindo-se M a cada um dos vértices do pentágono, mostre que os segmentos $MB + MD = MA + MC + ME$.

34. (IME-87/88) Dado um círculo de raio R e centro O, constrói-se 3 círculos iguais de raios r, tangentes dois a dois, nos pontos E, F, G e tangentes interiores ao círculo dado. Determine, em função de R, o raio destes círculos e a área da superfície EPG, compreendida entre os três círculos e limitada pelos arcos EG, GF e FE.

Resp.: $r = R(2\sqrt{3} - 3)$; $S = 3(7 - 4\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \pi)R^2 / 2$

35. (IME-87/88) Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de K, onde $K = a + b - c$.

Resp.: $c = \dfrac{2S}{K \operatorname{tg} \frac{c}{2}} - \dfrac{K}{2}$.

36. (IME-87/88) Sobre os catetos AB e AC de um triângulo ABC, constroem-se dois quadrados ABDE e ACFG. Mostre que os segmentos CD, BF e a altura AH são concorrentes.

37. (IME-87/88) Seja o semi-círculo de diâmetro $AB = 2R$ e r sua tangente em A. Liga-se um ponto P da reta r ao ponto B, interceptando o semi-círculo no ponto C.

a) Demonstre que o produto $PB \,.\, BC$ é constante;
b) Determine o lugar geométrico do ponto médio de AC, quando P desloca-se sobre a tangente;
c) Seja $AP = PB/2$; calcule a área da porção do triângulo PAB, situada no exterior do semi-círculo.

Resp.: c) $S = R^2(5\sqrt{3} - 2\pi)/12$.

38. (IME-88/89) Numa circunferência de centro O e diâmetro $AB = 2R$, prolonga-se o diâmetro AB até um ponto M, tal que $BM = R$. Traça-se uma secante MNS tal que $MN = NS$, onde N e S são os pontos de interseção da secante com a circunferência. Determine a área do triângulo MOS.

Resp.: $R^2\sqrt{15}/4$.

39. (IME-88/89) São dados um segmento AB e os pontos C e D, que o dividem interna e externamente numa mesma razão. Mostre que as circunferências de diâmetro AB e CD são ortogonais.

40. (IME-88/89) Sejam ABC e ACD dois triângulos retângulos isósceles com o lado AC comum, e os vértices B e D, situados em semiplanos distintos em relação ao lado AC; nestes triângulos $AB = AC = a$ e $AD = CD$.

a) Calcule a diagonal BD, do quadrilátero ABCD;
b) Seja E o ponto de interseção de AC com BD. Calcule BE e ED;
c) Seja F a interseção da circunferência de diâmetro BC com a diagonal BD. Calcule DF e EF.

Resp.: a) $a\sqrt{10}/2$; b) $a\sqrt{10}/3$; c) $a\sqrt{10}/10$ e $a\sqrt{10}/15$.

41. (IME-88/89) Seja ABCD um trapézio cuja base maior $AB = a$ é fixa e cuja base menor CD tem comprimento constante, igual a b. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a ℓ. Os prolongamentos dos lados são paralelos se cortam em I.

a) Demonstre que o $\ell.g.$ descrito pelo ponto I, quando a base CD se desloca, é uma cônica;
b) Determine eixos e distância focal.

Resp.: a) Elipse de focos A e B; b) Eixo maior = $a\ell/a-b$; eixo menor = $a\sqrt{\ell^2-(a-b)^2}/a-b$; distância focal = a.

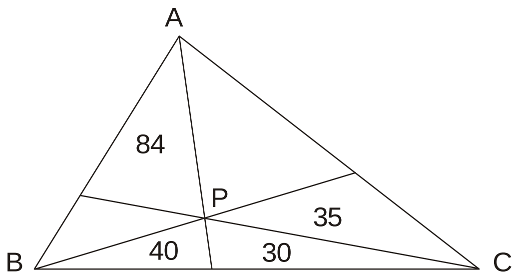
42. (IME-88/89) Seja um quadrado de lado a e um ponto P, exterior ao quadrado. Chame de ângulo sob o qual o quadrado é visto do ponto P" o menor ângulo com vértice em P, que contenha o quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos P, de onde o quadrado é visto sob um ângulo de 45º.

43. (IME-89/90) Seja $\overline{AB}$ um diâmetro de um círculo de centro O e raio R. Sobre o prolongamento de $\overline{AB}$ escolhemos um ponto P $(\overline{PB} < \overline{PA})$. Partindo de P tomamos uma secante que corta o círculo nos pontos M e N $(\overline{PM} < \overline{PN})$, de modo que $\overline{PM} = \overline{AN} = R$.

a) Mostre que a corda $\overline{MB}$ é um lado de um polígono regular inscrito de dezoito lados.
b) Encontre uma equação (do 3º grau) que determina a distância de P ao centro do círculo em função de R.

Resp.: a) $MB = 20^o = 360^o/18$; b) $d^3 - 3R^2d - R^3 = 0$.

44. (IME-89/90) Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC, dividindo-o em seis triângulos, quatro dos quais têm áreas 40, 35 e 84, como mostra a figura.



Calcule a área do triângulo ABC.

Resp.: 311.

45. (IME-89/90) Os lados de um triângulo estão em progressão aritmética e o lado intermediário mede ℓ. Sabendo-se que o maior ângulo excede o menor em 90º, calcule a razão entre os lados.

Resp.: $\ell\sqrt{7}/7$.

46. (IME-89/90) Prove que as tangentes ao círculo circunscrito a um triângulo, passando nos seus vértices, interceptam os lados opostos em três pontos colineares.

47. (IME-89/90) Seja um triângulo ABC cujos lados são tangentes a uma parábola. Prove que o círculo circunscrito ao triângulo passa pelo foco.

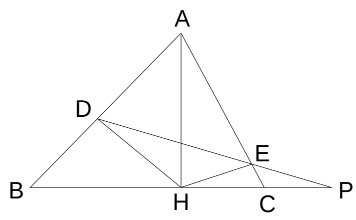
48. (IME-90/91) Sejam um círculo, com centro O e raio R, e um ponto P tal que $\overline{OP}$ = 3R.

a) Determine um diâmetro $\overline{MN}$ de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M.
b) Calcule, em função de R, os lados e a área do triângulo PMN.
c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K. Calcule $\overline{PK}$.
d) O diâmetro $\overline{MN}$ gira em torno de O. Qual o lugar geométrico dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN?
e) Determine a posição do diâmetro $\overline{MN}$ para que a área do triângulo PMN seja máxima.

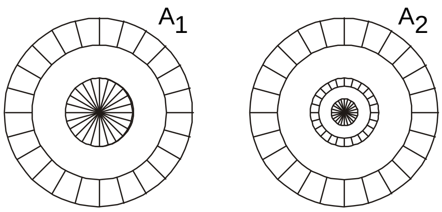
Resp.: b) $\text{PM e}2\sqrt{2}\,\text{R}$, $\text{MN} = 2\text{R}$, $\text{PN} = 2\sqrt{3}\,\text{R}$, $\text{S} = 2\sqrt{2}\text{R}^2$; c) $\text{PK} = 4\sqrt{3}\,\text{R}/3$; d) círculo de diâmetro OP (exceto o ponto P); e) $\text{MN} \perp \text{OP}$.

49. (IME-90/91) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num plano. Determine o lugar geométrico dos centros que são tangentes ao círculo dado (exteriormente) e à reta dada.

50. (IME-90/91) Num triângulo ABC traçamos a altura $\overline{AH}$ e do pé H dessa altura construímos as perpendiculares $\overline{HD}$, $\overline{HE}$ sobre os lados AB e AC; seja P o ponto de interseção de DE com BC. Construindo as alturas relativas aos vértices B e C determina-se também, de modo análogo Q e R sobre os lados CA, AB. Demonstre que os pontos P, Q, R são colineares.



51. (IME-90/91) No plano, considere um disco de raio R chame este conjunto de A_0. Divida um raio de A_0 em três segmentos congruentes e retire de A_0 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}$R e $\frac{2}{3}$R, chame este conjunto de A_1. O conjunto A_1 contém um disco de raio R_1 = $\frac{1}{3}$R, divida um raio deste disco em três segmentos congruentes e, mais uma vez, retire de A_1 a coroa circular de raios $\frac{1}{3}R_1$ e $\frac{2}{3}R_1$, chame este conjunto de A_2. Continue esse processo indefinidamente e seja A o conjunto resultante.



a) Calcule a área do conjunto A_n obtido após a n-ésima etapa do processo descrito acima.
b) Calcule a área do conjunto resultante A.

Resp.: a) $S_n = \pi R^2 . \frac{5 \, . \, 3^{2n} + 3}{8 \, . \, 3^{2n}}$; b) $S = \frac{5}{8}\pi R^2$.

Material cedido pelo Professor André Aguiar
Sistema Elite de Ensino – Barcarena – PA