Simulado Rumo ao ITA 2009/2010
Matemática

1 - Suponha que o crescimento populacional de duas cidades, **A** e **B**, é descrito pela equação**:** $\mathbf{P(t) = P_0 e^{kt}}$

onde: $\mathbf{P_0}$ é a população no início da observação
k é a taxa de crescimento populacional
t é o tempo medido em anos
e é a base do logaritmo natural
P(t) é a população **t** anos após o início da observação

Se no início de nossa observação a população da cidade **A** é o quíntuplo da população da cidade **B**, e se a taxa de crescimento populacional de **A** permanecerá em 2% ao ano e a de **B** em 10% ao ano, em quantos anos, aproximadamente, as duas cidades possuirão o mesmo número de habitantes? Considere ln 5 = 1,6

a) 10 b) 20 d) 35 e) 100 e) 550

2 - Seja uma função f real definida para todo x real tal que: f é ímpar; $f(x + y) = f(x) + f(Y)$; e $f(x) \geq 0$, se $x \geq 0$. Definindo $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x}$, se $x \neq 0$, e sendo <u>n</u> um número natural, podemos afirmar que:

a) f é não – decrescente e g é uma função ímpar.
b) f é não – decrescente e g é uma função par.
c) g é uma função par e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.
d) g é uma função ímpar e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.
e) f é não – decrescente e $0 \leq g(n) \leq f(1)$.

3 - Seja a equação $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$, onde a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são todos números reais. Podemos afirmar que a equação:

a) só admite um raiz de multiplicidade 5.
b) se tiver apenas 2 raízes de multiplicidade 1, existe uma raiz de multiplicidade 2.
c) se tiver uma raiz de multiplicidade 3, tem duas raízes de multiplicidade 1.
d) se tiver apenas 4 raízes distintas, uma delas tem multiplicidade 2.
e) se tiver uma raiz real, todas serão iguais.

4 - Seja:

$$\begin{cases}(k_1+k_2)x+(k_2-k_3)y+(k_1-k_3)z=0\\(k_2-k_1)x+(k_2+k_3)y+(k_3-k_1)z=0\\(k_1-k_2)x+(k_3-k_2)y+(k_3+k_1)z=0\end{cases}$$

um sistema homogêneo de equações lineares reais em x, y e z. Com respeito ao sistema acima podemos afirmar:

a) se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$ então o sistema só admite solução trivial.
b) se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
c) o sistema admite solução não trivial se e somente se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.
d) se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.
e) o sistema admite solução não trivial para quaisquer valores reais de k_1, k_2 e k_3.

5 - A função f(x) satisfaz $f(10 + x) = f(10 – x)$ e $f(20 – x) = – f(20 + x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) f é uma função par e é periódica.
b) f é uma função par mas não é periódica.
c) f é uma função ímpar e é periódica.
d) f é uma função ímpar mas não é periódica.
e) f não é par e nem ímpar.

6 - Suponha que $M = \{(x, y) / |xy| = 1, x > 0\}$ e $N = (x, y) / \text{arc tan } x + \text{arc tan } y = \pi\}$. Qual das seguintes alternativas é verdadeira?

a) $M \cup N = \{(x, y) / |xy| = 1\}$
b) $M \cup N = M$
c) $M \cup N = N$
d) $M \cup N = \{(x, y) / |xy| = 1$, x e y não negativos simultaneamente$\}$
e) NRA

7 - Um ponto z_1 no plano complexo move-se de acordo com a equação $|z_1 - z_0| = |z_1|$, onde z_0 é um ponto fixo que não é a origem. Um segundo ponto z move-se de acordo com a equação $z_1 z = -1$. Qual é o lugar geométrico dos pontos z no plano complexo.

a) elipse com centro em $-1/z_0$.
b) circunferência com centro em $-1/z_o$ e raio $1/|z_0|$.
c) parábola com vértice em z_0.

d) duas retas, uma coeficiente angular z_0 e outra com coeficiente angular $-z_0$.

e) uma hipérbole com foco em $-z_0$.

8 - A função f(x) possui seis raízes reais, e $f(3 + x) = f(3 - x)$ para todo número real x. Qual é o valor da soma das seis raízes de f(x)?
a) 10 b) 12 c) 9 d) 0 e) 18

9 - Determinando-se a condição sobre t para que a equação $4^x - (\ln t + 3)2^x - \ln t = 0$ admita duas raízes reais e distintas, obtemos:

a) $e^{-3} \le t \le 1$ b) $t \ge 0$ c) $e^{-1} < t < 1$ d) $3 < t < e^2$ e) N.R.A

10 - Um ponto L dista 2r unidades de comprimento do centro de uma circunferência cujo raio mede r unidades de comprimento. A partir de L conduza duas tangentes à circunferência e denote os pontos de tangência por P e T. Então, a área lateral do cone circular reto, gerado pela rotação do triângulo LPT, tendo como eixo de rotação a mediana que parte de L, medida em unidades de área é:

A) πr^2. B) $\dfrac{3\pi r^2}{2}$. C) $\dfrac{\pi r^2}{2}$. D) $2\pi r^2$. E) $5\pi r^2$.

11 - Um determinado sistema de segurança funciona com computadores que operam independentemente onde cada computador tem uma probabilidade p de falhar ($0 \le p \le 1$). Um sistema de segurança é mais eficiente se a maioria de seus computadores funciona. Para que valores de p um sistema de segurança com 3 computadores é mais eficiente que um sistema de segurança com 5 computadores?
a) $p > 1/2$ b) $p > 1/3$ c) $p > ¼$ d) $p > 1/5$ e) $p > 1/6$

12 - É dada uma progressão geométrica com **1.000** termos; a razão dessa progressão é igual ao seu primeiro termo. A soma dos logaritmos neperianos dos termos dessa progressão é **1.001.000**. O primeiro termo dessa progressão é:

a) 2 b) 2^2 c) $e^{1/2}$ d) e^2 e) e

13 - Analisa as afirmativas abaixo.

1) Existe uma progressão geométrica de **10** termos $a_1, a_2, ..., a_{10}$ de modo que $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ e $(a_{10})^{1/8} = 3\left(2^{1/8}\right)$.

2) a equação $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ admite sempre duas raízes cujo produto é **1**, qualquer que sejam $a \neq 0$ e **b**.

3) No desenvolvimento de $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n+1}$, onde **n** é inteiro positivo, pela fórmula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de **x**.

4) Para todo **x** tal que $(\operatorname{sen} x)(\cos x) \neq \dfrac{1}{2}$, tem-se $\operatorname{tg}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} - (\operatorname{sen} x)(\cos x)}$.

5) **sen x + sen y < 0** sempre que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < y < 0$ e $x - y > \pi$.

Quantas afirmativas estão corretas?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

14 - Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, onde a ∈ $\mathfrak{R}$. Considere que λ_1, λ_2 e λ_3 são as três raízes da equação det $(A - \lambda I) = 0$, sendo I a matriz identidade de ordem 3. Assinale a alternativa que contém um valor de a de modo que $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 27$.

a) a = – 1 b) a = 0 c) a = 1 d) a = 2 e) a = 3

15 - Uma esfera é colocada no interior de um vaso cônico com $\sqrt{55}$ **cm** de geratriz e $\sqrt{30}$ **cm** de altura. Sabendo-se que os pontos de tangência estão a **3 cm** do vértice, o raio da esfera vale:

a) $2\sqrt{30}$ cm b) $\frac{\sqrt{35}}{2}$ cm c) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ cm d) 3 cm e) N.D.R.A.

16 - Sobre o número de soluções inteiras da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 28$$

considere as afirmativas:

1. O número de soluções nas quais $x_i \geq 0$ é igual a 35860 .

2. O número de soluções nas quais $x_i > 0$ é igual a 17550 .

3. O número de soluções nas quais $x_i \geq i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ é igual a 2380 .

Conclui-se que :

(A) Todas são verdadeiras.

(B) Somente 1 e 2 são verdadeiras.

(C) Somente 1 e 3 são verdadeiras.

(D) Somente 2 e 3 são verdadeiras.

(E) NDA.

17 - Dois círculos são tangentes internamente no ponto M. Uma reta tangencia o círculo interno no ponto P e intersecta o círculo externo nos pontos Q e R. A razão entre as medidas dos ângulos $\angle QMP$ e $\angle RMP$ é igual a :

(A) 1:1 (B) 1:2 (C) 1:3 (D) 1:4 (E) 1:5

18 - Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular, se det A = 0, ou seja, se o determinante de A é nulo, e não singular se det A ≠ 0. Mediante esta definição, qual das afirmativas abaixo é verdadeira?

a) a soma de duas matrizes A e B é uma matriz singular, se det A = - det B.

b) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se, e somente se, ambas forem singulares.

c) O produto de duas matrizes é uma matriz singular, se pelo menos uma delas for singular.

d) Uma matriz singular possui inversa.

e) A transposta de uma matriz singular é não-singular.

19. Consideremos a equação: $(\tan a)^{\cos^2 x - \cos x . \log b^7 + 8(\log b)^2} = (\cot a)^{-2(\log b)^2}$

onde $\pi/4 < a < \pi/2$, a fixado, $b > 0$ e log b indica o logaritmo neperiano de b. A equação acima tem solução em x se:

a) $0 < \log b$

b) $-1/7 < \log b < 2$

c) $-2 < \log b < 1/7$

d) $-2 < \log b < 1$

e) $-1/6 < \log b < 1/8$

20 - Dadas as sentenças:

I) Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ duas funções satisfazendo (gof) (x) = x , para todo $x \in X$. Então f é injetiva, mas g não é necessariamente sobrejetiva.

II) Seja $f: X \to Y$ uma função injetiva. Então, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, onde A e B são dois subconjuntos de X.

III) Seja $f: X \to Y$ uma função injetiva. Então para cada subconjunto A de X, $f(A^c) \subset (f(A))^c$ onde $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ e $(f(A))^c = \{x \in Y \mid x \notin f(A)\}$

Podemos afirmar que está (estão) correta(s):

a) as sentenças I e II b) as sentenças II e III c) apenas I d) as sentenças I e III e) todas

21 - Os valores de a e K reais que tornam verdadeira a expressão:

$\log_a 2a + \frac{\log_{2a} K}{\log_{6a} K}(\log_a 2a)^2 = (\log_a 2a)(\log_a 3)$ são:

a) a = $\sqrt{2}/2$ e qualquer valor de K, K > 0. b) a = 2 e qualquer valor de K, K > 0, K ≠ 1.

c) a = $\sqrt{2}/2$ e qualquer valor de K, K > 0, K ≠ 1 d) quaisquer valores de a e K com K ≠ 6a .

e) qualquer valor de a positivo com a ≠ 1 e a ≠ 1/6 e qualquer valor positivo de K.

22 - A área da região limitada pelo gráfico de

$$|x-60| + |y| = \left|\frac{x}{4}\right|$$

é igual a:

A) 400 B) 420 C) 440 D) 460 E) 480

23 - A respeito das raízes da equação:

$\frac{6}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}} = 3$ Podemos dizer que:

a) uma das raízes é irracional
b) todas as raízes são inteiras
c) todas as raízes são fracionárias
d) uma das raízes é um número inteiro ímpar
e) uma das raízes é um número inteiro par.

24 - Sejam p e q números reais não nulos e tais que p > q e p > 0. Determine o valor de $\frac{q}{p}$ para que a equação trigonométrica $p.\cos^2 x - (p+q)\cos x + q = 0$, com $0 \le x \le 2\pi$, possua exatamente três raízes reais.

a) – 1 b) 1 c) 0 d) 2 e) – 2

25 - Consideremos um número complexo z tal que $\frac{z^2}{zi}$ tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$ e $\log_2(z+\bar{z}+2) = 3$. Nestas condições, podemos afirmar que:

a) Não existe $1n\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right)$ b) $z^4 + 1n\,1n\left(\frac{z-\bar{z}}{i}\right) = -324$

c) $z + 2\bar{z}$ é um número real. d) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = \frac{1}{108}(1+i)$

e) $\left(\frac{1}{z}\right)^3 = -\frac{1}{108}(1+i)$

26 – Resolvendo nos números reais o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=18 \\ x^7+y^7+z^7=2058 \end{cases}$$

Encontramos:
a) Nenhuma resposta real
b) Apenas uma solução (a,b,c) real, a menos da ordem dos elementos.
c) Apenas duas soluções (a,b,c) reais, a menos da ordem dos elementos.
d) Apenas três soluções (a, b, c) reais, a menos da ordem dos elementos.
e) NRA

27 – Em relação as seguintes afirmativas:
I – A equação paramétrica $x = \sqrt{a - \sqrt{a+x}}$, possui solução da forma x = $\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$, para $a \geq 1$;
II – A equação $\sqrt{5-x} = 5 - x^2$ possui $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ como uma de suas soluções possíveis;
III – A equação $x^2 + (x+1)^2 = y^2$ possui infinitas soluções inteiras positivas;
a) nenhum item está correto; b) apenas o item III está correto;
c) apenas os itens I e II estão corretos; d) apenas os itens II e III estão corretos;
e) os itens I, II e III estão corretos;

28 – Resolvendo no intervalo (0, $\frac{\pi}{2}$) a equação

$$\frac{\sqrt{3}-1}{senx} + \frac{\sqrt{3}+1}{cosx} = 4\sqrt{2}, \text{ temos:}$$

a) nenhuma solução pode ser encontrada no intervalo dado;
b) possui apenas uma solução no intervalo dado, sendo x=$\frac{\pi}{6}$ a solução;
c) possui apenas uma solução no intervalo dado, sendo x=$\frac{\pi}{12}$ a solução;
d) possui apenas duas soluções no intervalo dado, sendo x=$\frac{11\pi}{18}$ uma delas;
e) NRA.

29 – Se um lado do quadrado ABCD está sobre a reta y = 2x – 17, e os outros dois vértices pertencem à parábola y = x^2, então a área mínima do quadrado (em unidades de área) é:
a) 40 b) 80 c) 160 d) 320 e) 1280

30 – Seja **n** = abc um número de três dígitos (escrito na base decimal). Se nós pudermos construir um triângulo isósceles (incluindo o triângulo eqüilátero) com a, b e c como comprimentos dos lados, então o número de inteiros **n** possíveis são:
a) 45 b) 81 c) 165 d) 180 e) 216