

Alunos do ITA Resolvem

Alunos do ITA Resolvem



Prova de Matemática – IME 2005/06



Equipe:

Anísio Medrado, Arthur Pereira Duarte, Caio dos Santos Guimarães, Ednardo Dantas, Felipe Correa de Moraes, Helder Toshio Suzuki, Ishai Elarrat, Luiz Adolfo Schiller, Rafael Daigo Hiram e Rafael Louzada (alunos do 1º ano do ITA).

Comentário:

A prova do IME, como de práxis, apresentou questões abrangentes, porém algumas com nível de dificuldade bastante elevado. Podemos dizer que as questões fáceis da prova, não foram tão fáceis e as questões difíceis não tão difíceis, se compararmos com a prova do ano anterior.

Algumas questões de soluções longas e trabalhosas poderiam ser simplificadas por alunos mais atentos (como a questão 7 a questão 2). No geral a prova apresentou o nível adequado esperado para uma prova de Matemática do IME.

Questão 01

Solução por: Rafael Louzada, Helder Suzuki

Seja $R=(a+bi)$ a razão da PA , onde a e b são reais

$$\begin{cases} a_1 = 1 - i \\ a_n = r + si \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1).R = r + s.i \Rightarrow (1-i) + (n-1)(a+bi) = r + si$$

Da identidade dos complexos temos:

$$\begin{cases} r = 1 + (n-1).a & \text{(I)} \\ s = (n-1).b - 1 \end{cases}$$

Temos também que:

$$a_n + R = a_{n+1} \Rightarrow r + si + a + bi = (r-s) + (r+s)i$$

De onde segue a identidade:

$$\begin{cases} r + a = r - s \\ s + b = r + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -s & \text{(II)} \\ b = r \end{cases}$$

De (I) e (II) temos que:

$$\begin{cases} r = 1 - (n-1).s \\ s = (n-1).r - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 1 - (n-1).((n-1).r - 1) \\ s = (n-1)(1 - (n-1)s) - 1 \end{cases}$$

Chegamos aos seguintes valores de r e s :

$$r = \frac{n}{2 - 2n + n^2}$$
$$s = -\frac{2-n}{2 - 2n + n^2}$$

Questao 02

Elaborado por: Rodolpho Oliveira de Castro, Helder Suzuki, Felipe Correa, Rafael Louzada e Luiz Adolfo Schiller

O produto das raízes é -30 . Seja r raiz real

$$(3+i)(3-i).r = -30 \Rightarrow r = -3$$

Logo $P(x) = (x+3).(x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10)$

Seja

$$Q(x) = (x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10) \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Da identidade de polinômios:

$$\begin{cases} a + c = -6 \\ ac + b + d = 15 \\ ad + bc = -18 \\ bd = 10 \end{cases}$$

Ora, sabemos que a equação do 4º grau só possui raízes complexas, logo, a, b, c e d têm de ser inteiros, pois são

combinações lineares de coeficientes inteiros. Logo:

i) $b=1$ e $d=10$ ($b=10$ e $d=1$ é simétrico)

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=4 \end{cases} \text{ que não fornece inteiros}$$

ii) $b=-1$ e $d=-10$ ($b=-10$ e $d=-1$ é simétrico):

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=26 \end{cases} \text{ que não fornece inteiros}$$

iii) $b=-2$ e $d=-5$

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=22 \end{cases} \text{ que não fornece inteiros}$$

iv) $b=2$ e $d=5$

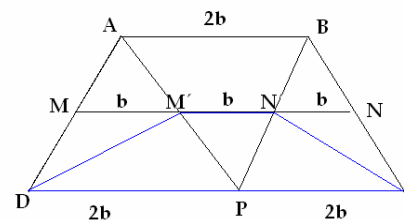
$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=8 \\ ad+bc=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=-6 \\ ac=8 \\ 5a+2c=-18 \end{cases} \Rightarrow (a,c)=(-2,-4)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+3)(x^2-2x+2)(x^2+5x-4)$$

Logo as raízes de $P(x)$ são: $3, 2+i, 2-i, 1+i$ e $1-i$

Questão 03

Elaborada por: Arthur Duarte e Rafael Daigo Hiram



Seja $AB = 2b$

i) $M'N'$ é base média do triângulo ABP . Logo $M'N' = b$

ii) $M'N = MM' = NN'$. Logo $M'N = NM' = NN' = b$

iii) MM' é base média do triângulo ADP e NN' é base média do triângulo BPC , temos que $DP = PC = b$

A área do trapézio $ABCD$ é dada por $\frac{(2b+4b)}{2} \cdot h = 3 \cdot b \cdot h = S$

Logo, a área do trapézio $M'N'CD$ é dada por:

$$\frac{(b+4b)}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{5bh}{4} = \frac{5S}{12}$$

Resposta: $\frac{5S}{12}$

Questão 04

Solução por: Caio Guimarães, Ishai Elarrat, Rafael Daigo Hiram

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Aplicando La Place na primeira Linha:

$$D_n = (2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} + (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot D_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$= 2 \cdot D_{n-1} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-2) \times (n-2)}$$

$$\Rightarrow D_n = 2 \cdot D_{n-1} - D_{n-2}$$

$$\Rightarrow D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2} = k$$

Trata-se de uma PA de razão k.

$$\begin{cases} n=2 \Rightarrow D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \\ n=3 \Rightarrow D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{cases} \Rightarrow k = D_3 - D_2 = 1$$

Logo o termo geral da PA, ou seja, D_n é dado por:

$$D_n = 2 + (n-1) = n + 1$$

Questão 05

Elaborada por: Rodolpho Oliveira de Castro, Helder Suzuki, Rafael Louzada

$$\begin{cases} \text{i) } C_{r+y}^r = \log_y x \\ \text{ii) } \log_y z = 4 + \log_x z \\ \text{iii) } C_{r+y}^y = \log_x z + \log_x z \end{cases}$$

$$\log_y x = \log_x z + 1 \Rightarrow \log_y x - \log_x z = 1$$

Mas, $C_{r+y}^r = C_{r+y}^y$

De (i) e (iii): $\log_y x = \log_x z + 1 \Rightarrow \log_y x - \log_x z = 1$ (iv)

De (ii): $\log_y z - \log_x z = 4$ (v)

De (v) e (iv): $\log_y \frac{z}{x} = 3 \Rightarrow z = x \cdot y^3$

Substituindo em (iv):

$$\log_y x - [\log_x x + 3 \log_x y] = 1 \Rightarrow \log_y x - 1 - 3 \cdot \frac{\log_y y}{\log_y x} = 1 \Rightarrow \log_y x - \frac{3}{\log_y x} = 2$$

Seja $\log_y x = A$, temos:

$$A - \frac{3}{A} = 2 \Rightarrow A^2 - 2A - 3 = 0 \Rightarrow A = \{-1, 3\}$$

$A = -1$ não é válido, pois $C_{r+y}^r = \log_y x = -1$ não existe

$A = 3$: $\log_y x = 3 \Rightarrow x = y^3 \Rightarrow z = x^2$

$$C_{r+y}^r = \log_y y^3 = 3 \Rightarrow \begin{cases} \binom{r+y}{r} = \binom{3}{2} \\ \text{ou} \\ \binom{r+y}{r} = \binom{3}{1} \end{cases}$$

Logo temos as possibilidades: $r = 2$ e $y = 1$ (não convém, pois y é base logarítmica)

ou $r = 1$ e $y = 2$.

De onde segue que os valores que satisfazem o sistema dado, para (x, y, z, r) são:

$$(x, y, z, r) = (8, 2, 64, 1)$$

Questão 6

Elaborado por: Felipe Correa, Ednardo Dantas, Luiz Adolfo Schiller

I) Os ângulos estão em PA, e são denotados por: $y - R$, y , $y + R$ ($R > 0$)

Temos que: $(y - R) + y + (y + R) = \pi \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$

Analisando a equação dada:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x) \cdot (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x) = 1$$

Elevando ao quadrado, em ambos os lados e seja $A = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \cdot (1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 = 1 \\ \Rightarrow & (1 + 2A) \cdot (1 + 2A + A^2) = 1 \\ \Rightarrow & 2A^3 - 3A^2 = 0 \\ \Rightarrow & A^2 \cdot (2A - 3) = 0 \end{aligned}$$

Que nos dá as possíveis soluções:

$$A = 3/2 \text{ ou } A = 0$$

Analisando as soluções, temos que $A = 3/2$ não é solução, uma vez que A é o produto de dois termos menores ou iguais a 1.

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow x = k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \text{ inteiro})$$

Como a solução deve nos dar ângulos de um triângulo, então

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Conferindo na equação original:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cdot \left(\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1$$

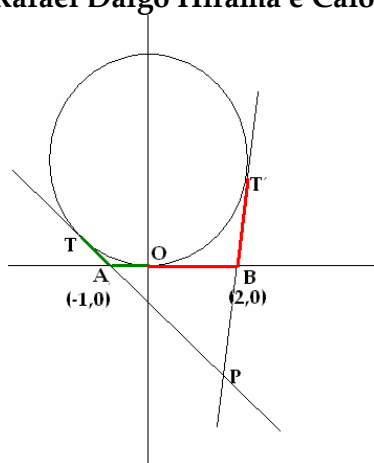
Logo um outro ângulo vale $\frac{\pi}{2}$ (II)

De (I) e (II) concluímos que a razão R da PA é igual a $\frac{\pi}{6}$ e

com isso, os ângulos do triângulo são: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$

Questão 07

Elaborada por : Rafael Daigo Hirama e Caio Guimarães



$TA = AO = 1$ (tangentes a partir de A)

$TB = OB = 2$ (tangentes a partir de B)

Logo, $TP = AP + 1$ e $T'P = 2 + BP$

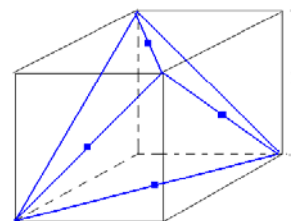
$TP = TP'$ (tangentes a partir de P)

Logo $AP + 1 = 2 + BP$, e com isso $PA - PB = 1$

P descreve uma hipérbole de focos A e B, e eixo real igual a 1. O segundo ramo da hipérbole será traçado quando a circunferência estiver abaixo do eixo dos abcissas. O ponto (1,0) não está definido no LG já que as tangentes não podem passar pela origem.

Questão 08

Elaborado por: Luiz Adolfo Schiller, Rodolpho Castro, Anísio Medrado, Arthur Duarte

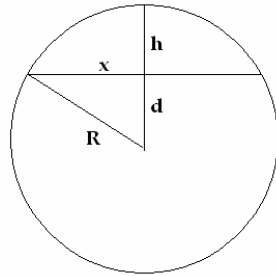


Para que exista uma esfera tangente às arestas do tetraedro regular, basta imaginar uma esfera inscrita num cubo onde as diagonais de suas faces coincidem com as arestas do tetraedro (como na figura).

Raio da esfera vale $\frac{L}{2}$, mas $L\sqrt{2} = a$. Logo $L = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$(a) V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{\pi.a^3\sqrt{2}}{24} \text{ u.v.}$$

$$(b) d = h_{\text{tetraedro}} - \frac{1}{2}(\text{diagonal}_{\text{cubo}}) = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$



$$V_{\text{segmento}} = \frac{\pi h}{6}(3x^2 + h^2)$$

Achando x e h em função de a :

$$\begin{cases} x^2 = R^2 - d^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{a^2}{12} \\ h = R - d = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{segmento}} &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} - 1) \right) \cdot \left(3 \cdot \frac{a^2}{12} + \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} - 1) \right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} - 1) \right) \cdot \left(\frac{a^2(5 - \sqrt{3})}{12} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{a^3 \pi \sqrt{6}}{864} (\sqrt{3} - 1)(5 - \sqrt{3}) = \frac{a^3 \pi \sqrt{6}}{432} \cdot (3\sqrt{3} - 4) = \frac{a^3 \pi}{432} \cdot (9\sqrt{2} - 4\sqrt{6})$$

Logo o volume interno é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} V_i &= V_{\text{esfera}} - 4V_{\text{segmento}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{24} - 4 \cdot \frac{a^3 \pi}{432} \cdot (9\sqrt{2} - 4\sqrt{6}) \\ &= a^3 \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{2}}{24} \right) \end{aligned}$$

Resposta: V interno $= a^3 \pi \left(\frac{\sqrt{6}}{27} - \frac{\sqrt{2}}{24} \right)$ u.v.

Questão 09

Solução por: Rafael Daigo Hirama

$$(x + y) \cdot k = xy$$

$$\Leftrightarrow xy - (x + y) \cdot k = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - (x + y) \cdot k + k^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow (x - k)(y - k) = k^2$$

x e y são inteiros, logo $x - k$ e $y - k$ devem dividir simultaneamente k^2 .

As possibilidades serão:

$$\begin{cases} 1) (x-k) = 1 \Leftrightarrow (y-k) = k^2 \\ 2) (x-k) = k \Leftrightarrow (y-k) = k \\ 3) (x-k) = k^2 \Leftrightarrow (y-k) = 1 \\ 4) (x-k) = -1 \Leftrightarrow (y-k) = -k^2 \\ 5) (x-k) = -k \Leftrightarrow (y-k) = -k \\ 6) (x-k) = -k^2 \Leftrightarrow (y-k) = -1 \end{cases}$$

O conjunto solução (x,y) é:

$$\{(1+k, k^2+k); (2k, 2k); (k^2+k, 1+k); (-1+k, k-k^2); (0,0); (-k^2+k, k-1)\}$$

Onde k é o número primo dado.

Questão 10

Elaborado: Caio Guimarães e Rodolpho Castro

Lema:

$$1 + \operatorname{cis} \alpha = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

pois:

$$1 + \operatorname{cis} \alpha = 1 + \cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1 + (2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1) + i \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot (\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{2}\right))$$

a)

i) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ (Teorema das Linhas)

ii) $(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} + C_n^2 \cdot \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} + C_n^3 \cdot \operatorname{cis} \frac{6\pi}{3} + \dots$

De (ii) temos que a parte real do desenvolvimento é dada

por:

$$\operatorname{Re}(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + C_n^2 \cdot \cos \frac{4\pi}{3} + C_n^3 \cdot \cos \frac{6\pi}{3} + \dots$$

$$= (C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \dots) - \frac{1}{2} \cdot (C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^5 + \dots) \quad \text{(iii)}$$

Somando (i).2 + (iii):

$$2 \cdot \operatorname{Re}(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n + 2^n = 2 \cdot A - (C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^5 + \dots) + (C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \dots) = 3S_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{3} \left[\operatorname{Re}(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n + 2^{n-1} \right]$$

Mas, do lema:

$$\operatorname{Re}(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n = \operatorname{Re} \left(2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} \right)^n = \operatorname{Re} \left(\operatorname{cis} \frac{n \cdot \pi}{3} \right) = \cos \frac{n \cdot \pi}{3}$$

$$\text{Logo } 2 \cdot \operatorname{Re}(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3})^n + 2^n = 3S_0 \Rightarrow S_0 = \frac{2}{3} \left[\cos \frac{n\pi}{3} + 2^{n-1} \right]$$

b) De (ii), temos que a parte imaginária é dada por:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^n &= C_n^1 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + C_n^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} + C_n^4 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + C_n^5 \cdot \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (C_n^1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^5 + \dots) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (C_n^1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^5 + \dots) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{Im}\left(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}$$

(iv)

De (iii):

$$\frac{1}{2} (C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^5 + \dots) = S_0 - \operatorname{Re}\left(1 + \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}\right)^n = S_0 - \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$\Rightarrow (C_n^1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^5 + \dots) = 2 \left(S_0 - \cos \frac{n\pi}{3} \right) \quad (\text{v})$$

Fazendo (iv) + (v):

$$\Rightarrow 2 (C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \dots) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + 2 \left(S_0 - \cos \frac{n\pi}{3} \right)$$

Logo, dividindo por 2 em ambos os membros, obtemos a expressão geral para S1:

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \frac{2}{3} \left[\cos \frac{n\pi}{3} + 2^{n-1} \right] - \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} + \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3} \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} \cdot \left[\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} + 2^n \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{3} \right) + 2^n \right]$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} \left[2 \left(\operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) + 2^n \right] = \frac{1}{3} \left[2 \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{6} \cdot \pi \right) \right) + 2^n \right]$$

Logo, a expressão final é dada por:

$$S_1 = \frac{1}{3} \left[2 \left(\operatorname{sen} \left(\frac{2n-1}{6} \cdot \pi \right) \right) + 2^n \right]$$