AFA – Prova de Matemática - Código 11
Gabarito Elaborado por: Caio Guimarães e Ishai Elarrat

---

31. $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)\Rightarrow\left(cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)^n=cis\left(n.\frac{5\pi}{3}\right)$

$\mathrm{Im}(z^n)=0\Leftrightarrow\arg(z^n)=k\pi$ k inteiro

$\Leftrightarrow\frac{5n}{3}\pi=k\pi\Leftrightarrow k=\frac{5n}{3}$, ou seja, n deverá ser múltiplo de 3.

n = {0, 3, 6, 9}

Existe apensas um elemento primo. **Resposta: D**

---

32. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}=cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $w=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

(01) $|z|.w^{10}=1.\sqrt{2}^{10}.cis\left(-\frac{70\pi}{4}\right)=32.cis\left(-17\pi-\frac{\pi}{2}\right)$, que é imaginário puro (V)

(02) $w^{-1}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (V)

(03) $\bar{z}=cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)=cis\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (V)

(04) $x^4=\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)\Leftrightarrow|x|^4.cis(4X)\equiv\sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)\Leftrightarrow|x|=\sqrt[8]{2}$

O circunferência na qual x estaria situado, tem raio de tamanho $|x|=\sqrt[8]{2}$ (F)

Somando: 7 que pertence a [5,8] **Resposta B**

---

33. Sejam q e r as razões da PA e PG, respectivamente:

$$\begin{cases}PA=(a,a+r,a+2r,\ldots)\\PG=(1,q,q^2,\ldots)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a.1=-1\\(a+r).q=1\\(a+2r).q^2=3\end{cases}\Rightarrow\frac{(-1+r)^2}{(-1+2r)}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3-6r+3r^2=-1+2r\Rightarrow 3r^2-8r+4=0\Rightarrow r=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}\Rightarrow r=\left\{2,\tfrac{2}{3}\right\}\Rightarrow q=\{1,-3\}$$

PG é alternante, logo q = -3. Continuando com a seqüência :

PA = (-1, -1/3 , 1/3 , 1, 5/3)
PG = (1, -3 , 9 , -27, 81)

Seqüência: (-1, 1, 3, -27 , 135) , Logo a soma de seus 5 primeiros termos é: 111

Resposta: D

34.
(F) O resto na divisão de P(x) por x+1 = P(-1)=
$5.(-1)^{2n} - 4(-1)^{2n+1} - 2 = 5 - 4 - 2 = 0$
qualquer que seja n natural.

(F) $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow P(0) = 1 \\ x = 3 \Rightarrow P(3) + 3P(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow P(3) = 7$

(F) Como os coeficientes do polinômio são reais, então se 1+i é raiz, então 1-i também é raiz. Como o polinômio tem grau ímpar, a 3ª raiz só poderá ser real, o que implica que qualquer número diferente de 1+i e 1-i não será raiz.

Resposta: A

---

35. 0 é raiz tripla. Para haver apenas outras duas raízes basta que $(x^3 - mx + 16)$ tenha raiz dupla.

$$P(x) = x^3.(x^3 - mx + 16) \equiv x^3.(x-a).(x-b) \equiv x^3(x^3 - x^2(b+2a) + x(2ab + a^2 - a^2b))$$

Da identidade:
$\begin{cases} 0 = -b - 2a \\ -m = 2ab + a^2 \\ 16 = -a^2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \Rightarrow b = -4 \\ -m = -4a^2 + a^2 \Rightarrow m = 3a^2 \Rightarrow m = 12 \\ 16 = -a^2(-2a) \Rightarrow a = 2 \end{cases}$ Logo as outras raízes são 2 e -4

S = {-4, 0 ,2 } que não formam uma PA. **Resposta B**

---

36. (01) **V -** Primeiro escolhamos dos bancos voltados para trás, em quais serão sentados as pessoas que possuem tal preferência: $C\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Permutando-as: 2!. Agora escolhamos, dos bancos voltados para frente, quais serão os que serão utilizados pelas pessoas com tal preferência: $C\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Permutando – as 3!. As outras 3 pessoas serão arrumadas aleatoriamente em 3 lugares: 3! .

Principio multiplicativo: $C\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.2!.3!.C\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}.3! = 2160$

(04) **V –** Achando os números pedidos sem a condição de não poder usar 0 consecutivos.
Para o 1º algarismo temos 5 opções: 1,2,3,4,5
Para o 2º algarismo temos 6 opções: 1,2,3,4,5,0
Para o 3º algarismo temos 6 opções: 1,2,3,4,5,0
Para o 4º algarismos temos 3 opções (ímpar): 5,3,1

Principio multiplicativo: 5.6.6.3=540

Achando os números em que 0 aparece 2 vezes seguidas (obrigatoriamente na 2ª e 3ª posição)
Primeiro algarismo: 5 opções
Quarto algarismo: 3 opções

Principio multiplicativo: 5.3 = 15

540 – 15 = 525 . Verdadeiro.

(08) **F-** Basta escolher 2 retas de cada direção para definir o paralelogramo. $C\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}.C\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 126$

Resposta: A

---

37. $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n \Rightarrow T_{k+1}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2x}\right)^k.(x^2)^{n-k} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=\frac{n}{2} \\ C_3=\frac{n(n-1)}{2}.\frac{1}{4} \end{cases}$

$2C_2=C_1+C_3 \Rightarrow n=1+\frac{n(n-1)}{8} \Rightarrow n=\{1,8\}$. Para que haja 3 números termos, n>1,logo n=8, que é um cubo perfeito

Resposta: C

38.
Probabilidade em que pelo menos 2 tenham cores distintas será 100 % - a probabilidade de todas saírem em cores iguais.

Casos totais:
- Das 13 canetas, devemos escolher 3: C(13,3)=286

Casos favoráveis:
- Todas Pretas: C(6,3) = 20
- Todas Azuis: C(4,3) = 4
- Todas Vermelhas : C(3,3) = 1

Logo a probabilidade pedida é: $1-\frac{25}{286}=\frac{261}{286}$ **Resposta A**

39.
I) (V) Seja (b) a matriz transposta de a.

$$b_{32}=a_{23}=2+2.(3)=8$$

II) (V) Para i=j temos que $a^t{}_{ij}=a_{ij} \Rightarrow a^t{}_{ij}-a_{ij}=0$. Logo os termos da diagonal B se anulam

III)(V) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 1 - sen^2\theta \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta \neq 0 \Leftrightarrow \theta \neq \pi/2 + k\pi$, k inteiro

IV) (F) Se a matriz é simétrica, os termos simétricos em relação à diagonal principal são iguais. Daí tiramos que: $\begin{cases} 4^x = 2^{x+2} \Rightarrow x = 2 \\ \log y = \log(2z-4) \Rightarrow y = 2z - 4 \Rightarrow z = 5, y = 6 \\ y! = (z+1)! \Rightarrow y = z+1 \end{cases}$ x.y.z=60

IV é a única falsa. **Resposta C**

---

40. De x, para y foram feitas as seguintes alterações:
- 1ª linha foi trocada com a 3ª linha (Muda o sinal do determinante)
- 2ª linha foi multiplicada por 3 (Multiplica o determinante por 3)

Logo y=-3x **Reposta C**

41.
$\begin{cases} 8x - y - 2z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow 15x = 5z \Rightarrow z = 3x \Rightarrow y = 2x \Rightarrow (x, y, z) = (x, 2x, 3x)$ que é uma PA de razão x . **Respostas C**

42.

$$(r): \begin{cases} u = \dfrac{x-3}{2} \\ u = \dfrac{y+2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 3x - 13 = 2y$$

(F) $3 \neq -13$
(V) m=0
(V) 3x-13=2y forma ângulos agudos com as retas : x=0 e y=0 que são perpendiculares.
(V) m=-1,5 temos que os coeficientes angulares das retas serão iguais , valendo 1,5
Resposta : D

---

43. Informações a serem consideradas:
- A altura do triangulo é equivalente a 3 OP
- O Raio de λ_2 é igual à metade do lado do quadrado que vale $R_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- O Raio $R_1 = OP = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e logo $R_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

- o coeficiente angular da reta suporte BC é $-tg60 = -\sqrt{3}$ e o coeficiente linear é então

3OP = $\sqrt{3}$

Com isso:

(V) A equação geral de λ_1 é: $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y\frac{\sqrt{3}}{3} = 0$

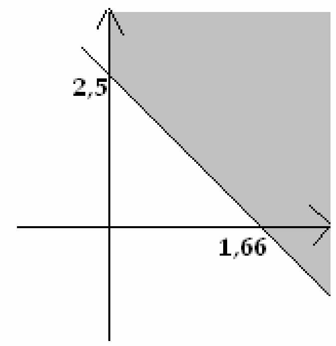
(F) O conjunto dado mostra os pontos que estão fora da circunferência 1 e dentro da 2. Ou seja, representa o complementar do conjunto dos pontos dentro da coroa circular.

(V) Sabendo os coeficientes linear e angular: $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ **Resposta : B**

---

44. FALSA – (a) , pois para a equação dada os eixos da elipse serão 2a=2, 2b=1
Resposta: A

45.



Se um homem deseja nutrir-se com exatos 65 g de proteína, devemos ter:
39x+ 26y = 65 => 3x + 2y = 5

O gráfico que apresenta as possíveis cominações de tais elementos para fornecer pelo menos a quantidade de proteínas queridas é o mostrado à esquerda. Logo a opção d está incorreta.

Resposta D

46. Analisando, graficamente temos que:

Para $x \in [-1, \tfrac{1}{2}] \Rightarrow \exists x / h(x) > g(x)$ Logo a incorreta é a afirmativa B

Resposta: B

47. ANULADA

48. $x^2 - 5x + 6 = 0$ representa uma parábola com valores negativos para 2< x < 3. Ou seja, a função $gof(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{\sqrt{x^2-5x+6}}} = (x^2-5x+6)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = (x^2-5x+6)^{\frac{1}{4}}$.

Como a função x^2-5x+6 não pode se anular para a existência de g(x) no ponto f(x) temos que o domínio é: R – [2,3] **Resposta: B**

49. Seja x o valor da bolsa mensal.

Pedro gasta mensalmente $\dfrac{5x}{7}$ e Paulo gasta mensalmente $\dfrac{5x}{7}$+300

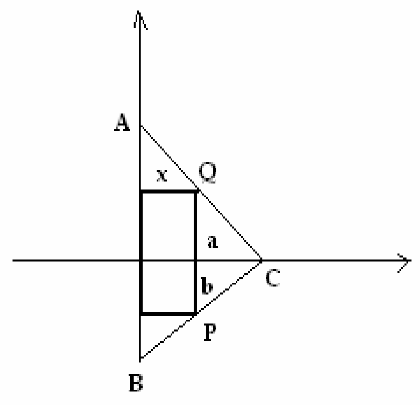
No final do ano, Paulo deverá 1680. Então: $12.\left(\dfrac{5x}{7}+300\right) = 12x + 1680 \Rightarrow x = 560$

Paulo gasta 700 reais mensalmente, que corresponde a 125 % de sua bolsa.

Pedro guardará $\dfrac{12x}{7} = 960 \neq 980$

Contando com a ajuda apenas de Pedro, Paulo receberá uns extras $\dfrac{12x}{7} = 960 < 1680$, que serão insuficientes. **Resposta C**

50.



Reta AC : $y = -x + 3$ Reta BC: $y = \dfrac{2}{3}x - 2$

a = 3-x e b = $2 - \dfrac{2}{3}x$ => QP= $5 - \dfrac{5}{3}x$

Logo a área é dada por:

$$A(x) = (x)\left(5 - \frac{5}{3}x\right) = 5x - \frac{5}{3}x^2 \Rightarrow A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,5$$

A área do retângulo vale: 15/4 que é menor que 4.
Resposta C

51.

(F) $f(p)-f(q)=\left(-\frac{1}{2}a^p-1\right)-\left(-\frac{1}{2}a^q-1\right)=\frac{a^q-a^p}{2}\neq\left(-\frac{1}{2}a^{p+q}-1\right)$

(F) $f'(x)=-\frac{1}{2}a^x.\ln a<0,\forall x\in\Re$ Logo é estritamente decrescente

(V) $x<0\Rightarrow 0<a^x<1\Rightarrow -1>-\frac{1}{2}a^x-1>-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$

(V) Do 2º item temos que f(x) é injetora. Analisando os limites nos infinitos, temos que a imagem de B = $]-\infty,-1[$ e com isso, ela é sobrejetora, portanto Bijetora.

Resposta A

---

52. Vejamos as seguintes considerações:

- $(2-\sqrt{3})^x>0,\forall x\in\Re$

- $(3^{\sqrt{x}-2})^2=5^{2-\sqrt{x}}\Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-2)=2-\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=4$, que é divisor de 1024

- $f'(x)=-(a-4)^x.\ln(a-4)<0\Leftrightarrow\begin{cases}a>4\\ \ln(a-4)>0\Leftrightarrow a-4>1\Leftrightarrow a>5\end{cases}\Leftrightarrow a>5$

- $10^4<10^x<10^5\Leftrightarrow 4<x<5$, ou seja x está entre 4 e 6

Logo a Incorreta é a letra c. **Resposta CB**

---

53. Vejamos as considerações

- $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{9}=\log_{2^{-2}}3^{-2}=\log_2 3$

- Se x = $\log_3 14.\left(\log_{2/5}3\right).\left(\log_4 2/5\right)=\frac{\log 14}{\log 3}.\frac{\log 3}{\log 2/5}.\frac{\log 2/5}{\log 4}=\log_4 14$,

então $4^x=14\Rightarrow 1<x<2$

- $m=\frac{1}{\log_3 x}=\log_x 3 \Rightarrow x^m.\log_3 x = x^{\log_x 3}.\log_3 x = 3\log_3 x$

  $x^m.\log_3 x = \log_3 x^3 < 1 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{3}$ Porém 7/3 > $\sqrt[3]{3}$

- $x^{\frac{1}{\log_3 x}} = x^{\log_x 3} = 3 < \frac{1}{\log_3 x} \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{3}$

  Porém temos que: $2\sqrt{2} > 3 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^3 > \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$

Logo a alternativa correta é b. **Resposta B**

---

54. $g(x)=f(x+1)=\log_3(x+1) \Rightarrow g^{-1}(x)=3^x-1$ e $f^{-1}(x)=3^x$

$g^{-1}(x)+f^{-1}(x)=3^x+3^x-1=2 \Leftrightarrow 2=3^{1-x} \Leftrightarrow x=1-\log_3 2$

Resposta: D

---

55. Do enunciado:

$$\begin{cases} 30=60.e^{-\alpha.5} \\ 6=60.e^{-\alpha.t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(0,5)=\ln e^{-\alpha.5} \\ \ln(0,1)=\ln e^{-\alpha.t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0,7=-\alpha.5 \\ -(0,7+1,6)=-\alpha.t \end{cases} \Rightarrow 5.\frac{2,3}{0,7}=t \cong 16\min$$

Resposta: D

56.

(01) V

$$f(x)=\frac{sen3e^x}{sene^x}-\frac{\cos 3e^x}{\cos e^x}=\frac{sen3e^x.\cos e^x - sene^x.\cos 3e^x}{sene^x.\cos e^x}=\frac{sen(3e^x-e^x)}{sen(2e^x)/2}=2$$

(02) F Tome x=π. Temos então que senx+ cosx = -1

(04) V $\csc\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sec x=-\frac{5}{4}$

(08) F $-1 \le \frac{x-1}{6} \le 1 \Rightarrow -5 \le x \le 6$

(16) F $|senx.\cos x| = \dfrac{|sen2x|}{2}$; sen2x tem período π . Porém quando aplicamos módulo, as partes em que a função é negativa se tornam positivas e seu período cai para π/2

A soma das falsas vale: 2+8 + 16 = 26 **Resposta A**

---

57. Da figura, temos:

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{1750}{750} = \dfrac{7}{3}$ e $tg\beta = \dfrac{250}{750} = \dfrac{1}{3}$

Seja x = tgα

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\beta + tg\alpha}{1 - tg\alpha.tg\beta} \Rightarrow \frac{7}{3} = \frac{1/3 + x}{1 - x/3} \Rightarrow \frac{7}{3} - \frac{7x}{9} = \frac{1}{3} + \frac{9x}{9} \Rightarrow x = 9/8$$

Resposta B

58.

I) V - s é paralela a α, então o seu vetor diretor é perpendicular ao vetor normal $\vec{A}$ de α

- s é paralela a β, então seu vetor diretor é perpendicular ao vetor normal $\vec{B}$ de β

Logo s é paralela ao produto vetorial $\vec{A}$ x $\vec{B}$ que é paralela a r

II) F - Uma reta oblíqua a um plano será oblíqua a todo plano paralelo a ele.
III) V – Os dois planos terão o mesmo vetor normal
IV) F – contra-exemplo: canto da sala
V) F – contra-exemplo, os eixos do espaço R^3

Existe apenas 2 verdadeiras. **Resposta: B**

---

59. Área da base do cilindro: π dm², ou seja, a cada 10 cm temos π Litros.

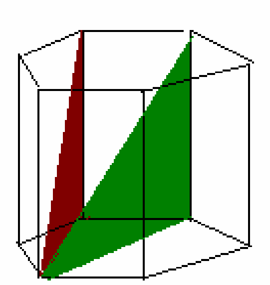
Até o nível da água descer 20 cm de água, ou seja até 2π litros vazados, a vazão registrada é de 2 L /min (2 furos estão sendo usados). Depois desse momento, apenas 1 L é vazado por min.

Para vazarem 20 cm de água, foi necessário descer 2π Litros de água, ou seja, se passaram π mins. Do tempo total medido sobram ainda $\dfrac{4\pi}{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3}$ mins.

Nesses $\dfrac{\pi}{3}$ mins, mais $\dfrac{\pi}{3}$L são vazados, e sobram π - $\dfrac{\pi}{3}$ = $2\dfrac{\pi}{3}$ no reservatório.

Resposta: C

60.



Seja a a aresta da base e L a altura do prisma

Área Lateral = 6.a.L=144

Volume = $\dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4}.L = 144\sqrt{3}$, logo: a=4 e L=6

- $d^2 = L^2 + \left(2\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d^2 = 36 + 48 \Rightarrow d = 2\sqrt{21}$

- $D^2 = L^2 + (2a)^2 \Rightarrow D^2 = 36 + 64 \Rightarrow D = 10$

$\Rightarrow D.d = 20\sqrt{21}$ **Resposta D**