Folha de Exercicios – Turma IME/ITA
Inspeção de Raízes e Teorema de Bolzano

Ao analisar funções polinomiais de graus maiores ou iguais a 3 costuma-se sempre buscar ter uma noção de quais são suas raízes, concavidades, máximos, mínimos, pontos de inflexão, e assim por diante. O cálculo nos fornece métodos bastante práticos para descobrir facilmente todos esses aspectos da função, exceto as raízes de uma função. Embora exista método para achar raízes, precisamente, de um polinômio de 3º grau, o processo sem dúvida não é dos mais práticos, ainda mais se buscamos somente uma noção bruta do gráfico. Portanto recorremos ao processo de Bolzano e outros processo de inspeção de raízes para se ter apenas uma idéia da localidade das raízes, o que as vezes já é o suficiente para resolver o problema em questão.

Inspeção de Raízes:

Proposição:

Dado $f(x)= A_0 . x^n + A_1.x^{n-1} + ... + (A_{n-1}) x + A_n$ (coeficientes inteiros).
Se (p/q) é raíz racional de f(x) (com p, q primos entre si) , então:

i) q é divisor de Ao
ii) p é divisor de An.

Da relação de Girard, temos que $(-1)^n . (A_n / A_0)$ = produto das raízes = (p/q).(k) onde k representa o produto das outras raízes.

$\Rightarrow (-1)^n$ An (q/p) . (1/k) = Ao .
$\Rightarrow$ An = Ao . (p/q) $(k/(-1)^n)$

Como p não divide q e como os coeficientes devem ser inteiros , independente das outras raízes e de seu produto k, é necessário (não suficiente) que p divida An e que q divida Ao.

Conclusão, devemos sempre procurar as raízes, entre os divisores de Ao, e An, o que já ajuda a diminuir a busca.

Teorema de Bolzano:
Dada a função $f(x)$, para um intervalo aberto $]a,b[$, temos que:

$f(a).f(b) < 0 \Leftrightarrow$ Existe um número ímpar de raízes no intervalo $]a,b[$
$f(a).f(b) > 0 \Leftrightarrow$ Existe um número par, ou zero raízes no intervalo $]a,b[$
$f(a).f(b) = 0 \Leftrightarrow$ a ou b é raiz.

Esse teorema é bastante intuitivo, pois se $f(a).\ f(b)$ possui um produto negativo, significa que os sinais de $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes , e portanto $f(a)$ e $f(b)$ estão em lados opostos em relação ao eixo x. Com isso, temos que a função deve ter cruzado o eixo x um número ímpar de vezes (logo há um numero ímpar de raízes no intervalo dado). Se $f(a).f(b) >0$, os dois estão no mesmo lado em relação ao eixo x. Com isso, f cruzou o eixo um numero par ou 0 vezes. Se $f(a).f(b) = 0$, implica que $f(a) = 0$ ou $f(b)=0$, logo temos que a ou b são raízes.

Aplicação Específica:
Dado uma função do segundo grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com raízes A e B.
Dado um numero real w, temos que:
a. $f(w) >0 \Leftrightarrow$ w se encontra fora do intervalo $]A,B[$
a. $f(w) < 0 \Leftrightarrow$ w está no intervalo $]A,B[$
$a.f(w) < 0 \Leftrightarrow$ $w = A$ ou $w= B$

Exercícios:
1. Demonstre, intuitivamente a afirmativa da aplicação específica apresentada acima.

2. Dados $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $x=1$, está entre as raízes e que $a>0$, podemos afirmar que:
a) $(a+b+c) > 0$ b) $(a+b+c) <0$ c) $(b^2-4ac) <0$ d) $(a + b – 2c) > 0$

3. Determine os valores possíveis para m de modo que a equação $(m-2)x^2 - 2mx + 2m -3 = 0$ tenha 2 raízes reais, tais que
$-1< X_1< 4 < X_2$

4. Prove que se (p/q) , com p e q primos entre si, é raiz racional de $f(x)= A_0 . x^n + A_1.x^{n-1} + ... + (A_{n-1}) x + A_n$, com coeficientes inteiros, então: *p – mq é divisor de f(m) para um inteiro m. Em particular (p-q) é divisor de f(1) e (p+q) é divisor de f(-1)*

5. Sabendo que a seguinte equação $n^4 - 2n^3 + 3n – n -33 = 0$ possui uma única raiz natural, determine-a .

6. (IME 1983) Dada a equação $2mx^2 - 2x – 3m – 2 = 0$, onde m pertence aos Reais:
a) Determine m tal que uma raiz seja nula. Calcule a outra raiz.
b) Mostre que a equação dada tem sempre 2 raízes distintas.
c) Determine m para que uma raiz seja inferior a 1 e a outra seja superior a 1.

7. (IME 2000) Considere a, b e c números reais tais que a<b<c . Prove que a equação abaixo possui exatamente duas raízes X_1 e X_2 que satisfazem a condição: $a < X_1 < b < X_2 < c$.

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$$

8. (IME 2005) Determine o valor das raízes comuns das equações:

$$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0 \text{ e } x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0.$$

9. Considere o polinômio $p= x^n + (A_{n-1}).x^{n-1} + ... + (A_1) x + 1$ de coeficientes inteiros tal que p(1)>0. Sabe-se também que p admite uma raiz real Xo, bem como uma raiz complexa não real. Portanto a afirmação falsa é:
(a) Se Xo é racional, então Xo = -1
(b) Se Xo pertence a (0,1) pode ser que n=3
(c) Não existe um polinômio q com coeficientes inteiros tal que p=q(x-1)
(d) O número de raízes em [0,1] é par
(e) uma das afirmações acima é falsa

Duvidas: caiosg@globo.com

RUMOAOITA