Simulado de Matemática Estilo IME

(1) Ache as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$ sabendo que a soma de duas delas é 4.

(2) Comentar os valores dos inteiros a, b e c, para que $an^2 + bn + c$ esteja entre n e n + 1 para todos os valores inteiros de n.

(3) Prove que se um número par é a soma de dois quadrados, então sua metade é a soma de dois quadrados.

(4) Sejam A e B matrizes reais n x n, tais que AB + A + B = 0. Prove que AB = BA.

(5) Mostrar que os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ não podem fazer parte de uma mesma progressão aritmética.

(6) Resolva a equação cos(x) + cos(2x) – cos(3x) = 1.

(7) Numa eleição com dois candidatos A e B, há 20 eleitores e o candidato A vence por 15 a 5. Quantas são as marchas da apuração:
   (a) Possíveis?
   (b) Nas quais o candidato A permanece em vantagem (nem sequer empata) desde o primeiro voto apurado?
   (c) Nas quais o candidato a permanece sempre em vantagem ou empatado com o candidato B?

(8) Se MFM’ for uma corda focal de uma elipse e D o pé da diretriz que corresponde a F, prove que DM e DM’ terão a mesma inclinação sobre os eixos da curva.

(9) Seja um triângulo isósceles ABC (AB = AC). Constrói-se a semicircunferência de centro O (meio da base BC) e tangente aos lados AB e AC. Uma tangente qualquer a essa semicircunferência corta AB em M e AC em N. Demonstrar que os triângulos BOM e CON são semelhantes, e,depois, que o produto BM x CN é constante.

(10) São dados um semicírculo de diâmetro AA’, a tangente em um ponto M que encontre em B a tangente em A, e traça-se a perpendicular MP a AA’; designa-se por ANM o arco cujas extremidades são A e M. Calcular AP = x de modo tal que, girando a figura em torno de AA’, a razão dos volumes gerados pelas superfícies ABMNA e APMNA seja igual a K. Depois aplique para $k = \frac{1}{2}$.