

## CÔNICAS

01. (IME-81/82) Determine a equação de um círculo que tangencia a hipérbole  $x^2 - 4y^2 = 1$  nos pontos em que esta hipérbole é encontrada pela reta  $y = 3$ .
02. (CPRIME-85) Determine a equação da parábola cujo foco é o ponto  $P_0 = (-3, 8)$  e cuja diretriz é a reta  $y = 4$ .
03. (IME-79/80) Considere, no plano, o círculo de centro  $O = (0, 0)$  e raio 4. Determine a equação da hipérbole equilátera que passa pelas interseções do círculo com as retas  $y = 0$  e  $y = 2$ .
04. (IME-81/82) Determine a equação da parábola de eixo OX que tangencia a reta  $y = x + 1$  e tem seus vértices na origem.
05. (IME-82/83) Dada a hipérbole  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ , determine uma reta paralela ao eixo dos y tal que seus pontos de interseção com a hipérbole formam com o foco F (de abscissa positiva) um triângulo retângulo em F.
06. (CPRIME-84) Dada a hipérbole  $xy = 20$ , considere os pontos  $P_0 = (2, 10)$ ,  $P_1 = (-1, -20)$  e  $P_2 = (-4, -5)$  a ela pertencentes. Mostre que o ortocentro do triângulo  $P_0 P_1 P_2$  pertence à hipérbole.
07. (IME-77/78) De um ponto  $P(x, y)$  traçam-se duas tangentes à elipse  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Determine a equação do lugar geométrico do ponto P, de tal forma que estas tangentes sejam perpendiculares entre si.
08. (IME-79/80) Dada a cônica da equação  $3x^2 - y^2 - 12x - 6y = 0$ , determine:  
a) o centro da curva;  
b) as assíntotas de curva.
09. (IME-75/76) Dada a equação  $7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$ , obtenha o ângulo  $\theta$  de rotação que faz desaparecer o termo em xy, e ache a nova equação no sistema de eixos obtido pela rotação.
10. O ponto  $Q(2, 1)$  pertence à cônica de equação  $4x^2 + 30xy + 4y^2 - 40x + 210y = 210$ . Determine as novas coordenadas de Q, após transformação que elimine o termo em xy.
11. Dada a equação do termo retangular mediante uma rotação.
12. Identifique a cônica de equação  $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$ .

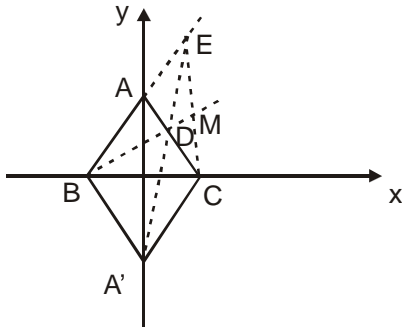
**01.** (IME-76/77) Sejam  $A, B \in \mathbb{R}^2$  de coordenadas cartesianas  $(2, 5)$  e  $(1, 3)$ , vértices fixos de um conjunto de triângulos de área 12. Determine a equação do lugar geométrico do conjunto de pontos  $C$ , terceiro vértice destes triângulos.

Observação: A área é considerada positiva qualquer que seja a orientação do triângulo, de acordo com a definição axiomática.

**02.** (IME-77/78 - 2º concurso) Enumere os elementos  $x$ ,  $x \in A$ , sendo que  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 88x + 70y + 15 = 0\}$  e sabendo que os elementos de  $x$  eqüidistam dos elementos de  $B$  e  $C$ , onde  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 17x + y - 35 = 0\}$  e  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 13x + 11y + 50 = 0\}$ .

**03.** (IME-79/80) Por um ponto  $M$  qualquer de uma hipérbole  $(h)$ , traça-se uma paralela a uma assíntota  $(a)$  de  $(h)$ , esta paralela encontra uma diretriz  $(d)$  de  $(h)$  em  $D$ . Sendo  $F$  o foco de  $(h)$  correspondente à diretriz  $(d)$ , mostre que  $MD = MF$ .

**04.** (IME-80/81) Dados dois triângulos equiláteros  $ABC$  e  $A'BC$  traça-se por  $A'$  uma reta qualquer que encontra os lados  $AC$  e  $AB$ , ou os seus prolongamentos, nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Determine o lugar geométrico dos pontos de encontro das retas  $BD$  e  $CE$ .



**05.** (IME-81/82) Determine as equações de uma circunferência com centro nos pontos  $(-2, 2)$  e tangente à circunferência:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ .

**06.** (IME-82/83) Determine a equação, identificando a sua natureza, do lugar geométrico de um ponto que se desloca de tal forma que o quadrado de sua distância ao ponto  $(1, 1)$  é proporcional à sua distância à reta  $x + y = 0$ .

**07.** (IME-83/84) São dadas duas retas paralelas  $r$  e  $r'$  e um ponto  $O$ . Determine o lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de  $O$  aos segmentos de reta  $AA'$ , vistos de  $O$  sob um ângulo reto e tais que  $A$  pertence a  $r$  e  $A'$  pertence a  $r'$ . Sabe-se que: distância de  $O$  a  $r$ :  $d$ ; distância de  $O$  a  $r'$ :  $p$ ; distância de  $r$  a  $r'$ :  $p - d$ .

**08.** (IME-84/85) Uma reta  $m_1$  passa pelo ponto fixo  $P_1(-1, -3)$  e intercepta a reta  $m_2: 3x + 2y - 6 = 0$  no ponto  $A$  e a reta  $m_3: y - 3 = 0$  no ponto  $B$ . Determinar a equação do lugar geométrico do ponto do segmento retilíneo  $AB$  à medida que a reta  $m_1$  gira em torno do ponto  $P_1$ .

**09.** (IME-85/86) Determine a equação e identifique o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados pela interseção da cônica  $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$  com as retas de coeficiente angular igual a  $\frac{1}{2}$ .

10. (IME-87/88) Mostre que por todo ponto não situado sobre o eixo  $Ox$  passam exatamente 2 parábolas com foco na origem e eixo de simetria  $Ox$  e que estão parábolas interceptam-se ortogonalmente.

11. Ache o L.G. das projeções dos focos da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) sobre uma tangente genérica.

12. Mostre que é constante o produto das distâncias dos focos de uma elipse a uma tangente genérica.

13. Prove que a área do triângulo determinado por uma tangente à hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  e suas assíntotas é uma constante, e determine-a.

14. Uma cônica de centro na origem e tendo eixos de simetria sobre os eixos coordenados intercepta a parábola  $y^2 = 4x$ , ortogonalmente, nos pontos de abscissa 1. Encontre a equação da cônica.

15. Ache o L.G. das projeções do foco da parábola  $y^2 = 2px$ ,  $p > 0$ , sobre uma tangente genérica.

16. Determine o L.G. dos centros de simetria da família de cônicas:  $k^2x^2 + 2xy + y^2 + 2kx + 2y + k^2 = 0$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

17. (IME-72/73) Seja  $m \in \mathbb{R}$  fixado e  $(k+1)^2y^2 + x^2 + 2(k-1)xy + mk^2y = 0$  a equação cartesiana de uma família  $F$  de cônica de parâmetro  $k$ . Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das cônicas da família  $F$ .

18. (IME-87-88) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos seja igual a uma constante  $k^2$ .

19. (IME-1987/1988) Encontre a equação do círculo inscrito no triângulo formado pelas retas

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ -4x + 3y + 9 = 0 \\ -3x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$$

20. (IME-1987/1988) Determine a equação e o raio do círculo de menor diâmetro que possui com o círculo  $x^2 + y^2 - 8x - 25 = 0$  eixo radical  $y - 2x - 5 = 0$ .

### MATRIZES – SISTEMAS LINEARES

01. (IME-73/74) Sejam as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ . Determine os inversos de  $AB$  e  $BA$ , caso existam.

02. (IME-73/74) Seja a matriz  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Mostre que, para toda matriz B inversível, o

determinante de  $S^{-1}CS$  é igual a 1.

03. (IME-73/74) Considere as matrizes A e B, apresentadas abaixo.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 10 \\ 0 & 25 & 0 \\ 6 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ . Os elementos a, b e c, da matriz A, são números positivos.

Determine a matriz  $A^{-1}$ , sabendo que  $A^2 + 2A + I = B$  (Observação: I é a matriz identidade).

04. (IME-76/77) Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz quadrada de ordem 3 em que  $a_{ij} = 0$  se  $i \geq j$ . Determine o menor inteiro positivo "r" tal que  $A^r = \theta$   $a_{ij} \neq 0$  se  $i < j$  ( $\theta$  representa a matriz nula).

05. (IME-77/78) Sejam as matrizes reais  $n \times n$   $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ , onde

$a_{ij} = 0$  se  $i + j \neq n + 1$

$a_{ij} \neq 0$  se  $i + j = n + 1$

$b_{ij} = 0$  se  $i + j \neq n + 1$

$b_{ij} \neq 0$  se  $i + j = n + 1$

1) Determine a matriz  $C = AB$ .

2) Determine a matriz  $D = A^{-1}$ .

06. (IME-78/79) Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & -3 \\ 5 & -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ . Determine as matrizes B, C, D, tais que:

$A = B - C - D$  e  $B = (b_{ij})$ , com  $b_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ ,  $C = (c_{ij}) = 0$ , se  $i \leq j$ ,  $D = (d_{ij}) = 0$ , se  $i \geq j$ .

09. (IME-78/79) Dadas as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , determine a matriz x,

tal que:  $Cx - AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

10. (IME-81/82) Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$  determine os vetores  $x \in \mathbb{R}^3$  para os quais existe um

escalar c tal que  $AS = cX$ .

11. (IME-82/83) Resolva a equação  $A^{-1}x = B$ , onde

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ .

12. (CPRIME-84) Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n. Usando as propriedades de produtos matriciais, dê uma condição para que se tenha  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , onde  $A^2 = A \cdot A$ .

11. O produto da matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \\ x & y \end{bmatrix}$  pela sua transposta é igual à identidade. Determine x e y sabendo que  $\det(A) > 0$ .

12. Sejam A, B, C matrizes quadradas de ordem n,  $O_n$  a matriz nula de ordem n e  $k \in R$ . Identifique as afirmativas verdadeiras.

- a)  $AB = BA$ ;
- b)  $A^2 = O_n \rightarrow A = O_n$ ;
- c)  $AB = O_n \rightarrow (A = O_n \text{ ou } B = O_n)$
- d)  $(AB)C = A(BC)$ ;
- e)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ;
- f)  $AB = AC \rightarrow B = C$ ;
- g)  $\det(KA) = K \det(A)$ ;
- h)  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ ;
- i)  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ;
- j)  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ .

13. Resolva pelo processo matricial o sistema: 
$$\begin{cases} a + 4b - c = -1 \\ 2a - b + c = 4 \\ 2a + b + 3c = 8 \end{cases}$$
.

14. Resolva pela Regra de Cramer: 
$$\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2y - 4z = 2 \end{cases}$$
.

15. Resolva os sistemas anteriores por Gauss-Jordan.

16. (IME-76/77) Dada a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}. \text{ Determine a matriz } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

17. (IME-79/80) Resolva o seguinte sistema: 
$$\begin{cases} x_3 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
.

18. (IME-83/84) Dado o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 53 \\ 28 \\ 27 \end{bmatrix}. \text{ Encontre o seu conjunto solução.}$$

19. (IME-81/82) Determine a matriz H tal que  $HA = B$  onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

20. (IME-79/80) Determine os valores de K para que o sistema abaixo tenha solução única:

$$x + (5 + k)y - 3z = -6$$

$$5x + y - 4z = -5$$

$$x + y - z = 0$$

$$x + 5y + kz = -1$$

21. Determinar m de modo que o sistema  $\begin{cases} 2x + y + mz = -1 \\ x - y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$  possua uma única solução.

22. Ache o valor de  $\lambda$  para o qual o sistema  $\begin{cases} x + y - \lambda z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \\ x + (1 + \lambda)y + z = 0 \end{cases}$  admita soluções distintas de (0, 0, 0).

23. (CPRIME-81) Determine  $\alpha$  e  $\beta$  para que o sistema  $\begin{cases} x + 2y + \alpha z = \beta \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$ :

- a) tenha solução única;
- b) tenha um número infinito de soluções;
- c) não tenha solução.

24. (CPRIME-82) Dê condições necessárias e suficientes para que um sistema homogêneo de n equações com n incógnitas tenha solução não trivial.

25. (CPRIME-82) Dê a inversa da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

26. (CPRIME-85) Determine a inversa da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ . Complemento: Determine a

inversa da matriz  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

27. (CPRIME-85) Seja o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \text{ Discutir os valores de } y_1, y_2 \text{ e } y_3 \text{ para que este sistema admita solu\c{c}\~{a}o.$$

28. (CPRIME-85) Determine o ponto e a nulidade da matriz abaixo:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}. \text{ Complemento: Determine o ponto e a nulidade da matriz abaixo:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

### **TRANSFORMAÇÕES LINEARES**

01. (CPRIME-84) Dada a aplicação linear  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $L(x, y) = (x + 2y, x - y)$ , dê sua matriz associada, com respeito à base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .

02. (CPRIME-84 e 85) Dada a função linear  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $L(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 3y, x - 2z)$ , dê sua matriz associada, com respeito à base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

03. (IME-80/81) Seja a transformada linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $T(x, y, z) = (x + y, z, y - z)$ . Determine a matriz associada à transformação linear  $T$  com relação à base canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

04. (CPRIME-84) Dada a aplicação linear  $T$  em  $\mathbb{R}^2$  que a cada ponto do plano associa seu simétrico em relação ao eixo  $ox$ , dê o núcleo e a imagem desta aplicação, bem como sua matriz em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .

05. Ache o núcleo, a imagem, o ponto e a nulidade das transformações:

### **PROGRAMA IME/1989 – MATRIZES/SISTEMAS LINEARES**

01. (IME-88/89 – CFOEM) Dados:

$M = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & a \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} b & b' \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , onde  $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ , resolva a equação  $AZ = B$ , sabendo que  $Z \in M$ , discutindo as condições que  $a, a', b$  e  $b'$  devem satisfazer para que a equação tenha solução.

**02.** (IME-86/87) Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- Encontre todas as matrizes  $B$ ,  $2 \times 2$ , que comutam com  $A$ ;
- Calcule  $A^{-1}$ ;
- Mostre que  $A^2 = 2A - I$ , onde  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;
- Encontre uma fórmula para  $A^n$  em função de  $A$  e  $I$ , e calcule  $A^{100}$ .

**03.** (IME-87/88) Seja  $A$  uma matriz  $2 \times 2$ .

a) Mostre que  $A$  comuta com todas as matrizes  $2 \times 2$  se e somente se comuta com as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- Calcule todas as matrizes  $A$ ,  $2 \times 2$ , do tipo acima, isto é, que comuta com qualquer matriz  $2 \times 2$ ;
- Diga quais destas matrizes  $A$  são inversíveis e determine a inversa.

**04.** (IME-87/88) Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes  $5 \times 5$ , com elementos reais. Denotando-se por  $A^t$  a matriz transposta de  $A$ .

- Mostre que se  $AA^T = 0$ , então  $A = 0$ ;
- Mostre que se  $BAA^T = A^T$  então  $BA = CA$ .

**05.** (IME-87/88 – CFOEM) Determine os valores de  $k$  para que o sistema 
$$\begin{cases} x_1 & - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

- tenha solução única.
- não tenha solução.
- tenha mais de uma solução.

**06.** (IME-87/88) Resolva e discuta o sistema abaixo.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

**07.** (IME-87/88) Determine o valor de  $a$  para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o, neste caso:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

**08.** (IME-88/89) Dado o sistema de equações lineares 
$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + y - z = 0 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$
, pede-se:

item a) os valores de  $a$  para que o sistema tenha solução;

item b) os valores de  $a$  para que a solução  $(x, y, z)$  satisfaça à equação  $x + y + z = 1$ .

**09.** (IME-81/82) Seja  $M_n(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes quadradas de ordem  $n$ , de coeficientes reais. Define-se a função  $\psi: M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  por  $\psi(A, B) = AB - BA$ . Calcule:  
 $\psi(\psi(A, B), C) + \psi(\psi(B, C), A) + \psi(\psi(C, A), B)$ .

**10.** Calcule pela regra de Chió.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 11 & 6 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:** 24.

**11.** Calcule pelo processo de Hoüd-Gauss:

a) 
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:** 30.

b) 
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:** 4.

**12.** Calcule os determinantes:

a) 
$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & -4 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:** 0.

b) 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 25 & 16 \\ 8 & 27 & 125 & 64 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:** -12.

$$c) A = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

**Resp.:**  $a(b-a)(c-b)(d-c)$ .

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}.$$

**Resp.:**  $(b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$ .

$$e) \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}.$$

**Resp.:**  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n+1} x + a_n$ .

$$f) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

**Resp.:**  $2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$ .

**13. Resolva as equações:**

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0.$$

$$b) \begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0.$$

**14. (IME)** Calcule o valor do determinante de ordem n:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & & a \end{vmatrix}.$$

**PROGRAMA IME ESPECIAL/1989 – MATRIZES/DETERMINANTES**

**01.** (IME-77/78) Sejam A, B, C, D matrizes reais 2x2.

$$A = (a_{ij}); \quad A^{-1} = B = (b_{ij})$$

$$C = (c_{ij}); \quad C_{ij} = a_{ij}^{-1}; \quad D = (d_{ij}); \quad d_{ij} = b_{ij}^{-1}.$$

Sabe-se que  $a_{ij} \cdot b_{ij} \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ;  $1 \leq j \leq 2$ , e que C é matriz singular (não admite inversa).  
Calcule o determinante de D.

**02.** (IME-78/79) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine x, sabendo-se que existe uma matriz inversível P, tal que  $A = p^{-1} \cdot B \cdot P$ .

**03.** (IME-80/81) Mostre que não existem matrizes quadradas A e B, que verifiquem  $AB - BA = I$ , onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

**04.** (IME-80/81) Seja  $M = (m_{ij})$  uma matriz quadrada real nxm de termos positivos. Define-se o “permanente de M” como:  $\text{perm } M = \sum_S m_{1+(1)} \cdot m_{2+(2)} \cdot \dots \cdot m_{n+(n)}$  onde S é o conjunto das

permutações  $(+(1), +(2), \dots, +(n))$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . A matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  tem, por exemplo, como

permanente  $1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 4 \times 9 + 1 \times 6 \times 8$ . Seja a matriz nxm,  $H = (h_{ij})$  onde  $h_{ij} = i(j+i)$ . Calcule o permanente de H.

**05.** (IME-82/83) Seja um determinante definido por  $A_1 = |1|$  e

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

- a) Pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre  $A_n$  e  $A_{n-1}$ ).
- b) Calcule a expressão de  $A_n$  em função de n.

**06.** (IME-83/84) Seja D o determinante da matriz  $A = [a_{ij}]$  de ordem n, tal que  $a_{ij} = |i - j|$ . Mostre que:  $D = (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$ .

**07.** (IME-83/84) Dada a matriz  $M = (m_{ij})$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e o conjunto } A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \text{ define-se em } A \text{ uma relação } R \text{ por:}$$

$a_i R a_j \leftrightarrow m_{ij} = 1$  verifique se  $R$  é uma relação de equivalência.

### TRIGONOMETRIA – PROGRAMA IME – 1989

**01.** Ache os valores máximos e mínimos das funções:

i)  $f(x) = 2 - 3 \cos x$ .

ii)  $f(x) = (2 - \sin x)(2 + \sin x)$ .

**02.** Estabelecer as condições a que deve satisfazer  $k$  para que as equações sejam possíveis.

i)  $4k \sin x - 2k - 1 = 0$ .

ii)  $\sin^2 x + 2k \sin x + k^2 - 1 = 0$ .

**03.** Sabendo que  $\sin x + \cos x = m$ , calcular  $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x \cdot \cos x}$ .

**04.** Determine  $m$  para que a expressão

$$y = (m - 1)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 2 \cos^2 x + m \cos x - 2 \cos x + 1$$

independa de  $x$ .

**05.** Para qual valor do parâmetro  $k$  a expressão  $y(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x)$  tem o mesmo valor, qualquer que seja o arco  $x$ ?

**06.** Eliminar o arco  $x$  entre as equações:

i)  $\cos^2 x - \sin^2 x = a$ ;  $2 \sin x \cos x = b$ .

ii)  $\sin^3 x - \cos^3 x = b$ ;  $\sin x \cos x = a$ .

**07.** Eliminar  $x$  e  $y$  das equações:

$$\sin x \cdot \cos y = a; \quad \sin x \cdot \sin y = b; \quad \cos x = a.$$

**08.** Determinar  $k$  de modo que a equação  $\sin x + \cos x = k$  admita soluções  $x_1$  e  $x_2$  tais que

$$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}.$$

**09.** Achar o valor máximo da expressão  $y(x) = \frac{\csc^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x - 1}$ .

**10.** Prove que quando os arcos  $x$  e  $y$  verificam a relação  $a \sin x \sin y + b \cos x \cos y = 0$ , a

expressão  $\frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \frac{1}{a \sin^2 y + b \cos^2 y}$  é independente de  $x$  e  $y$ .

11. Demonstrar que é isósceles o triângulo ABC cujos ângulos A e B verificam a relação  $\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$ .

12. Eliminar x e y entre as equações:

a  $\operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x = m$ ; b  $\operatorname{sen}^2 y + a \cos^2 y = n$ ; a  $\operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$ .

13. Resolva:  $4 \operatorname{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \operatorname{sen} x + \sqrt{2} < 0$ .

14. Sabendo que  $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b$  e  $\cos y \cdot \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} a$ , calcule  $\cos x$  e  $\operatorname{sen} y$ .

### PROGRAMA IME – 1989 - TRIGONOMETRIA

01. Mostre que  $\operatorname{sen}(x + y) \cdot \operatorname{sen}(x - y) = (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y) \cdot (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)$ .

02. Dada a relação  $\operatorname{tg}(m + 60^\circ) - \operatorname{tg}(m - 60^\circ) = 6\sqrt{3}$ , calcule  $\operatorname{tg}(45^\circ - m)$ , sendo m um ângulo obtuso.

03. Se  $x + y + z = \pi$ , prove que  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 1$ .

04. Se  $a + b + c = 180^\circ$ , mostre que  $\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 c = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c$ .

05. Se  $a + b + c = \pi$ , mostrar que  $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c$ .

06. Demonstrar que:  $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$ .

07. Calcular  $\operatorname{sen} x$ , dada a relação:  $\cos 3x = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ .

08. Resolver a equação:  $\cos 4x = 7 \cos^4 x - \frac{27}{4} \cos^2 x + \frac{3}{4}$ .

09. Dada a relação:  $\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x$ , calcular  $\cos x$ .

10. Dada a equação:  $3 \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 1$ , calcular  $\operatorname{tg} x$ .

11. Mostrar que:  $\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b}{\operatorname{sen} a \cos a - \operatorname{sen} b \cos b}$ .

12. Demonstrar que, se  $x + y + z = \pi$ , então  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$ .

13. Demonstrar que, se  $x + y + z = \pi$ , então  $\operatorname{cot} x \cdot \operatorname{cot} y + \operatorname{cot} x \cdot \operatorname{cot} z + \operatorname{cot} y \cdot \operatorname{cot} z = 1$ .

14. Partindo-se de  $\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b) = 0,8$ , mostrar que também existe a relação  $\sec a \cdot \sec b = \frac{5}{2} \operatorname{tg} a$ .

15. Sendo  $x + y + z = 90^\circ$ , demonstrar que:  $\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z = 1 - 2 \cos x \cos y \sin z$ .

16. Dada a relação:  $\cos a \cdot \cos x - \sin a \cdot \cos b \cdot \sin x = \cos b$ . Calcular  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

17. Demonstrar que:  $\frac{1 - \cos x + \sin x}{1 + \cos x - \sin x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$ .

18. Demonstrar:

a)  $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0$ ;

b)  $\sin 99^\circ - \sin 39^\circ - \sin 21^\circ = 0$ ;

c)  $\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ = 2 \sec 50^\circ$ ;

d)  $\sin 30^\circ + \sin 70^\circ + \cos 30^\circ + \cos 70^\circ = 2\sqrt{2} \cos 5^\circ \cos 20^\circ$ ;

e)  $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$ ;

f)  $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \sin 7a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a} = \operatorname{tg} 4a$ ;

g)  $\sin a + \sin 4a - \sin 5a = 4 \sin 2a \sin \frac{a}{2} \sin \frac{5a}{2}$ ;

h)  $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}$ ;

i)  $\operatorname{tg} 85^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ = 4$ .

19. Calcular:

a)  $\cos \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}$ ;

b)  $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12}$ .

20. Sendo  $\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$ , demonstrar que  $a - b = k\pi$  ou  $a + b = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

21. Sabendo que  $\sin 2A$ ,  $\sin 2B$  e  $\sin 2C$  estão em P.A., nesta ordem, demonstrar que  $\operatorname{tg}(B + C)$ ,  $\operatorname{tg}(C + A)$  e  $\operatorname{tg}(A + B)$  também estão em P.A., nesta ordem.

22. Sendo  $A, B, C$  os ângulos de um triângulo, demonstre:

a)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ ;

b)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ ;

c)  $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ .

23. Demonstrar que é retângulo o triângulo no qual se verifica a relação:

a)  $\sin C = \cos A + \cos B$ ;

b)  $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$ .

24. Se  $A + B + C = \pi$ , torne a seguinte expressão calculável por logaritmos:

$$y = \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C.$$

25. Mostre que  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ$ .

26. Prove que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação  $\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 1$ , então um deles vale  $120^\circ$ .

27. Demonstre que cada uma das relações abaixo caracteriza um triângulo retângulo:

a)  $\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$ ;

b)  $\frac{\operatorname{sen} B}{\cos C} = \operatorname{sen} A + \cot g B \cdot \cos A$ ;

c)  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} C}$ ;

d)  $\operatorname{sen} B + \cos C = (\cos B + \operatorname{sen} C) \operatorname{tg} B$ .

28. Sendo  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$  e  $\cos x + \cos y = b$ , calcule  $\operatorname{sen}(x + y)$ .

29. Sendo  $\cos x - \cos y = m$  e  $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = n$ , calcule  $\operatorname{csc}(x + y)$ .

30. Determinar entre que limites k deve variar, para que a equação  $\operatorname{sen} x \cdot (\operatorname{sen} x + \cos x) = k$  admita raízes.

31. Sabendo que  $\operatorname{tg}(\pi \cos x) = \cot g(\pi \operatorname{sen} x)$ , calcule  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

32. Simplifique:  $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ}{\cos 4^\circ + \cos 8^\circ + \cos 12^\circ + \dots + \cos 356^\circ}$ .

33. Ache o número de soluções da equação  $\cos^4 x + \cos^8 x + \cos^7 x + \dots + \cos x + 1 = 0$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

34. Sendo  $\cos x = \frac{a}{b+c}$ ,  $\cos y = \frac{b}{a+c}$ ,  $\cos z = \frac{c}{a+b}$ , calcular:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}.$$

35. Sendo  $a + b + c = 180^\circ$ , calcular:  $y = \frac{\cos(a-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} + \frac{\cos(a-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c} + \frac{\cos(b-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$ .

36. Determinar a relação que deve existir entre a, b e c no sistema:

$$x + y = a; \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b; \cot g x + \cot g y = c.$$

37. Simplifique:

a)  $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \dots + \operatorname{sen} (2n-1)a$ ;

b)  $\cos a + \cos 3a + \dots + \cos (2n-1)a$ ;

- c)  $\sin a \cos 5a + \sin 3a \cos 7a + \sin 5a \cos 9a + \dots + \sin (2n-1)a \cos (2n+3)a$ ;  
d)  $\frac{1}{\sin a \sin 3a} + \frac{1}{\sin 3a \sin 5a} + \frac{1}{\sin 5a \sin 7a} + \dots + \frac{1}{\sin (2n-1)a \sin (2n+1)a}$ ;  
e)  $\sin^3 a + 2n^3 3a + \sin^3 5a + \dots + \sin^3 (2n-1)a$ ;  
f)  $\cos^2 \frac{\pi}{17} + \cos^2 \frac{2\pi}{17} + \cos^2 \frac{3\pi}{17} + \dots + \cos^2 \frac{8\pi}{17}$ ;

38. Para  $x \geq 0$ ,  $a > 0$ ,  $x + a \leq \frac{\pi}{2}$ , provar:  $\sin(x+a) - \sin x < \operatorname{tg}(x+a) - \operatorname{tg} x$ .

39. Resolver a equação  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$  por três métodos.

40. Resolver a equação:  $\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 3 + \sqrt{3}$ .

41. Resolver a equação:  $5 \sin^2 x - 3 \sin x + 4 \cos^2 x = 3$ .

42. Resolver a equação:  $2 \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x = 1$ .

43. Resolver a equação:  $2 \sin x - \cos x + 2 \sin x \cos x = 1$ .

44. Resolver a equação:  $\sqrt{2} (\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cos x = 1$ .

45. Resolver as equações:

a)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 2 \operatorname{tg} 3x$ ;

b)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ ;

c)  $\sin 3x - \sin x \cos 2x = 0$ ;

d)  $2 \cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{2} = 2$ .

46. (IME) Resolver as equações:

a)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{cot} g x = \frac{2\pi}{3}$ ;

b)  $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1-x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}$ ;

c)  $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\cos x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2 \operatorname{csc} x)$ ;

d)  $\operatorname{arc} \operatorname{sen} x \sqrt{3} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} 2x - \operatorname{arc} \operatorname{sen} x$ .

47. Resolver:  $\operatorname{tg}(\operatorname{cot} g x) = \operatorname{cot} g(\operatorname{tg} x)$ .

48. Resolver e discutir:  $3 \operatorname{tg} 3x = (3n^2 - 4x4n + 2) \operatorname{tg} x$ .

49. Resolver os sistemas:

a)  $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} x + y = 105^\circ \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x = 2 \sin y \end{cases}$ ;

$$\begin{array}{lll}
 \text{d)} \begin{cases} x - y = 15^\circ \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tgy} = \sqrt{3} - 1 \end{cases}; & \text{e)} \begin{cases} x + 2y = \frac{\pi}{2} \\ 3 \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{tgy} = 5\sqrt{3} \end{cases}; & \text{f)} \begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{tgy} = \frac{3}{2} \\ \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = \frac{5}{4} \end{cases}; \\
 \text{g)} \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases}; & \text{h)} \begin{cases} \sin x - \sin y = 1 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3} \end{cases}; & \text{i)} \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}; \\
 \text{j)} \begin{cases} \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -2\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3} \end{cases}; & \text{k)} \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}; & \text{l)} \begin{cases} \operatorname{arc} \sin \sqrt{xy} - \operatorname{arc} \sin \sqrt{1-xy} = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}^2 \end{cases}.
 \end{array}$$

50. (IME) Determine a condição que deve ser imposta a b para que seja possível o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ \sec^2 x + \sec^2 y = b \end{cases}$$

51. (IME) Determine os valores de x e y que satisfazem as equações:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{5} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

52. (IME) Um triângulo tem um ângulo interno de  $75^\circ$  e os outros ângulos internos definidos pela equação abaixo. Determinar m.

$$3 \sec x + m(\cos x - \sin x) - 3(\sin x + \cos x) = 0.$$

53. Determine o menor ângulo positivo x, para o qual valem simultaneamente:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0 \text{ e } \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

54. Dividir o ângulo de  $45^\circ$  em duas partes, tais que suas tangentes estejam na razão  $\frac{5}{6}$ .

55. Resolver o sistema  $\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a \sin \alpha \\ \cos x + \cos y = 2a \cos \alpha \end{cases}$ , indicando as condições de possibilidade.

56. (IME) Calcule as menores determinações de x que satisfazem a:

$$4 \sin x + 2 \cos x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Dados:  $\operatorname{tg} 12^\circ = 0,212$ ;  $\operatorname{tg} 14^\circ = 0,249$ ;  $\operatorname{tg} 15^\circ = 0,268$ ;  $\operatorname{tg} 19^\circ 30' = 0,354$ ;  $\operatorname{tg} 23^\circ 30' = 0,435$ ;  $\operatorname{tg} 26^\circ 36' = 0,500$ ;  $\operatorname{tg} 17^\circ = 0,306$ ;  $\operatorname{tg} 29^\circ 18' = 0,560$ ;  $\operatorname{tg} 37^\circ 30' = 0,757$ ;  $\operatorname{tg} 50^\circ 12' = 1,2$ .

57. (IME-87/88) Sejam A, B e C os ângulos de um triângulo. Demonstre que  $2 \cos A \cos B \cos C = \frac{\sin 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$ .

58. (IME-87/88) Resolva, no intervalo  $[0, 2\pi]$ ,  $\frac{2 \operatorname{sen}^2 x + \cos x - 1}{\operatorname{sen} x - \cos x - \sqrt{2}} \geq 0$ .

59. (IME-87/88) Demonstre que, num triângulo ABC,  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$ .

60. (IME-87/88) Calcule a identidade  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \left( \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} \right)$ .

61. (IME-87/88) Calcule o lado c de um triângulo ABC, em função de sua área S, do ângulo C e de k, onde  $k = a + b - c$ .

### TRIGONOMETRIA – PROGRAMA IME – 1989

01. (IME-90/91) Sejam A, B, C os ângulos de um triângulo. Mostre que:  
 $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ .

02. (IME-90/91) Mostre que: Se num triângulo ABC vale a relação:  
 $\frac{\cos(B - C)}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen}(C - B)} = \operatorname{tg} B$  então o triângulo é retângulo com ângulo reto A.

03. (IME-90/91) Resolver o sistema:  $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 6 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tgy}} + \frac{\operatorname{tgy}}{\operatorname{tg} x} = -6 \end{cases}$  sabendo que x e y pertencem ao intervalo

$$\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

04. (IME-87/88) Determine o valor de:  $p = \operatorname{sen} \frac{\pi}{24} \operatorname{sen} \frac{5\pi}{24} \operatorname{sen} \frac{7\pi}{24} \operatorname{sen} \frac{11\pi}{24}$ .

05. (IME-89/90)

a) Obtenha a expressão para  $\operatorname{tg} 3\alpha$  em função de  $\operatorname{tg} \alpha = x$ .

b) Utilize o item anterior para determinar as soluções da equação:  $x^3 = 3mx^2 - 3x + m = 0$  onde  $m$  é um número real dado.

06. (IME-88/89) Resolva a seguinte desigualdade:  $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} \geq 2$  para  $0 \leq x \leq \pi$ .

07. (IME-88/89) Mostre que, se os ângulos de um triângulo ABC verificam a igualdade  $\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 4B + \operatorname{sen} 4C = 0$ , então o triângulo é retângulo.

08. (IME-87/88) Demonstre que, num triângulo ABC,  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\cos B + \cos C}$ .

09. (IME-87/88) Demonstre a identidade  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \left( \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} \right)$ .

10. (IME-86/87) Resolva a inequação  $\frac{2 \cos x + 2 \operatorname{sen} x + \sqrt{2}}{\cos x - \operatorname{sen} x} < 0$ .

11. (IME-86/87) Dado um triângulo ABC de lados a, b, c opostos dos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  respectivamente e de perímetro 2p, mostre que  $a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\cos \frac{\hat{B}}{2} \cos \frac{\hat{C}}{2}}$ .

12. (IME-85/86)

a) Resolva a equação  $m \cos x - (m + 1) \operatorname{sen} x = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

b) Determine m de modo que essa equação admita as raízes  $x'$  e  $x''$  cuja diferença seja  $\frac{\pi}{2}$ .

13. (IME-85/86) Num triângulo ABC ( $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ ) traçam-se as bissetrizes externas AA', do ângulo  $\hat{A}$ , com A' sobre o prolongamento de BC, e CC', do ângulo  $\hat{C}$  sobre o prolongamento de AB. Se  $AA' = CC'$ , mostre que  $c \operatorname{sen} \left( \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2} \right) = a \operatorname{sen} \left( \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} \right)$ .

14. (IME-83/84) Sejam l o lado de um polígono regular de n lados, r e R, respectivamente, os raios dos círculos e circunscrito a este polígono. Prove que  $r + R = \frac{l}{2} \cot g \frac{\pi}{2n}$ .

15. (IME-85/86) Mostre que o lado do isoságono regular convexo é igual à diferença, dividida por  $\sqrt{2}$ , entre o lado do decágono regular estrelado e o lado do pentágono regular convexo. Todos os três polígonos estão inscritos em um mesmo círculo de raio r.

16. (IME-79/80) Sejam  $l_4$ ,  $l_6$  e  $l_{10}$  os lados do quadrado, do hexágono e do decágono regulares, inscritos todos no mesmo círculo (C). Com esses três lados constroi-se um triângulo ABC, não inscrito em (C), tal que  $BC = l_4$ ,  $AC = l_6$  e  $AB = l_{10}$ . Pede-se calcular o ângulo  $\hat{A}$  do triângulo ABC.

17. (IME-82/83) Dada a equação  $\cos \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right) - m \operatorname{sen}^2 x = 0$ , determine a condição a que deve satisfazer m para que ela tenha pelo menos uma solução  $x_0$ , tal que  $0 < x_0 < 2\pi$ .

18. (IME-77/78) Dados os arcos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , todos do primeiro quadrante, e tais que  $\tan \hat{A} = \frac{1}{3}$ ,  $\tan \hat{B} = \frac{1}{5}$ ,  $\tan \hat{C} = \frac{1}{7}$  e  $\tan \hat{D} = \frac{1}{8}$ , verificar se  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \frac{\pi}{4}$ .

19. (IME-76/77) Prove que para todo arco x cada uma das relações abaixo é verdadeira:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{sen} \left( x + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$\cos x + \cos \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( x + \frac{4\pi}{3} \right) = 0.$$

20. (IME-80/81) Determine todos os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , situado no intervalo fechado  $[0, \pi]$ ,

$$\cos x + \cos 2y = 0$$

satisfazendo ao sistema:  $\cos y + \cos 2z = 0$ .

$$\cos z + \cos 2x = 0$$

21. (IME-79/80) Determine  $x$  na equação  $\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$ .

22. (IME-78/79) Achar os valores de  $x$  que satisfazem a equação:  $\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} (\cos x)$ .

23. (IME-83/84) Obtenha uma relação entre  $a$ ,  $b$  e  $c$ , eliminando  $x$  entre as duas equações abaixo:

$$a \operatorname{sen} x - b \cos x = \frac{1}{2} c \operatorname{sen} 2x$$

$$a \cos x + b \operatorname{sen} x = c \cos 2x$$

24. (IME-77/78-2º Concurso) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{xy} - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{1-xy} = \frac{\pi}{6} \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 \end{cases}$$

25. (IME-80/81) Dado o triângulo escaleno ABC, sejam respectivamente D, E, F os pontos de contato do círculo inscrito ao triângulo ABC com os lados BC, AC e AB. Mostre que os triângulos ABC e DEF não são semelhantes, e estabeleça a relação  $\frac{EF}{BC}$  em função de  $\operatorname{sen} \frac{B}{2}$  e  $\operatorname{sen} \frac{C}{2}$ .

### TEORIA DOS CONJUNTOS

01. Sejam  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $C = \{1, 3, 5, 9\}$ ,  $D = \{1, 4, 7\}$ ,  $E = \{3, 5\}$ .

Ache  $x \subset U$  sabendo que:

i)  $X$  e  $B$  são disjuntos.

ii)  $(\complement x) \cap D = \{4, 7\}$

iii)  $X$  é subconjunto próprio de  $C$ .

iv)  $E \subset X$ .

02. Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. A diferença simétrica entre  $A$  e  $B$  é definida por:

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ . Sendo  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{b, c, d, e, f\}$ , ache  $A \Delta B$ .

03. Dos conjuntos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sabe-se que  $x \cap y \cap z = \{a, b\}$ ,  $x \cup y = \{a, b, c, e, f\}$ ,  $y \cup z = \{a, b, c, g\}$  e  $x \cup z = \{a, b, e, f, g\}$ . Determine  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $(y \times Z) \cap (y \times x)$ .

04. (IME-76/77) Dada a sucessão  $A = (A_n)$ , onde  $A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ , pede-se determinar  $B$ ,

$C$ ,  $D$ , abaixo.

a)  $\bigcup_{k=1}^3 A_k = B$ ;

$$b) \bigcap_{t=2}^4 A_t = C;$$

$$c) \bigcap_{t=1}^3 \left( \bigcup_{k=t}^3 A_k \right) = D.$$

**05.** (IME-75/76) Dado um conjunto  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e três sub-conjuntos de  $E$ , a saber,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , tais que:  $A \cap B = \{2, 4\}$ ;  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $A \cap C = \{2, 3\}$ ;  $A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ , determine  $C \cap (B \cup A)$  e  $A \cap (B \cap C)$ .

**06.** (IME-73/74) Considerar os conjuntos  $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ ,  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ,  $B = \{a, c, e, i\}$ ,  $C = \{a, b, c, e, h, i\}$ ,  $D = \{a, e, f, i\}$ . Determine o único conjunto  $x \subseteq U$  que satisfaz a equação  $(A \cup B) \cap X = C - D$ .

**07.** (IME-73/74) Para os mesmos conjuntos  $U$ ,  $A$  e  $B$  do exercício anterior, calcule  $V = C \cup (C \cup A \cup C \cup B)$  e  $Z = (C \cup A \cap B) \cup (A \cap C \cup B)$ .

**08.** (IME-74/75) Dado o conjunto  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , considere os pares  $(x, y)$  e a relação  $R$ , tais que:  $x \in A$ ,  $y \in A$ ,  $x R y \Leftrightarrow 1 \leq x + y \leq 5$ . Escreva os pares  $(x, y)$  que pertencem ao produto cartesiano  $A \times A$  e que satisfazem a relação  $R$ .

**09.** (IME-73/74) Sejam as relações  $F$ ,  $G$  e  $H$  abaixo, definidas como conjuntos de pares ordenados:  
 $F = \{(1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 3), (5, 4), (6, 1)\}$ ;  
 $G = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ ;  
 $H = \{(1, 1), (2, 3), (5, 4), (3, 5), (4, 7)\}$ .

- quais das relações acima são funções?

- defina pelo conjunto de pares ordenados a relação composta de  $F$  com  $G$ , isto é, o resultado de aplicar primeiro  $F$  e depois  $G$ .

- se entre  $F$ ,  $G$  e  $H$  existir uma função que possua inversa, indique esta inversa por seus pares ordenados.

**10.** (IME-78/79) Dados os conjuntos  $S = \{2, 3\}$  e  $H = \{0, 1, 2\}$ , exiba todas as funções que podem ser definidas de  $H$  para  $S$ . Seja  $F(H, S)$  o conjunto de tais funções. Indique em  $F(H, S)$ , se existir:

a) uma função crescente.

b) uma função sobrejetora.

c) uma função injetora.

d) uma função bijetora.

e) uma função decrescente.

f) uma função nem crescente, nem decrescente.

**11.** (IME-77/78) Determine o domínio  $A$  da função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \ln\{[\log_{10}(x^2 - x - 2)] - 1\}$ .

**12.** (IME-77/78) É dada a função  $f$  real da variável real, definida como  $f(x) = |x + 1| + |2x - 1|$ .

Esboce o gráfico de  $f$  nos seguintes intervalos:  $x \geq \frac{1}{2}$ ;  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ;  $x \leq -1$ .

13. (IME-73/74) Uma função  $f(x)$  é definida em  $\mathbb{R}$  de modo que  $f(x) \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 1 \\ 0,5, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ . Considere  $x \in J = [-0,5; 3]$ . Qual o intervalo (ou os intervalos) descrito por  $f(x)$  quando  $x$  varia em  $J$ .

14. (PRIME-84) Seja  $Z$  o conjunto dos números inteiros. Defina-se em  $Z$  uma relação  $R$  por  $x R y \leftrightarrow xy > 0$ . Verifique se  $R$  é uma relação de equivalência.

15. (PRIME-84 e 85) Sejam  $A, B, C \subseteq S$  (universo); seja  $A'$  o complementar de  $A$  em  $S$ , ou seja,  $A' = \{x \in S; x \notin A\}$ . Justifique por diagrama de Venn que em geral é falsa a igualdade  $A' \cup B' = (A \cup B)'$ . (quando é verdadeira?).

16. (IME-82/83) Complete a tabela abaixo que define uma operação binária associativa sobre o conjunto  $P = \{1, 2, 3, 4\}$ .

*	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	3	4
3	3	4	3	4
4				

17. (CPRIME-84 e 85) Dados os conjuntos  $A = \{y \in \mathbb{R}; y - x_0 \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{x_0 + z; z \in \mathbb{Z}\}$ , onde  $x_0$  é um real fixado,  $\mathbb{R}$  indica o conjunto dos números reais e  $\mathbb{Z}$  indica o conjunto dos números inteiros, mostre que  $A = B$ .

18. Sendo  $f(x) = \sqrt[3]{2x+3} - 1$  e  $g(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$ , ache  $f^{-1}$ ,  $g^{-1}$  e  $g \circ g$ .

19. Sejam  $q$  e  $r$  funções cujo domínio é o conjunto dos inteiros maiores que zero. Sabe-se que  $q(1) = 1$ ,  $r(1) = 0$  e:

$$\text{se } r(n) < 2q(n) + 1, \text{ então } \begin{cases} r(n+1) = r(n) + 1 \\ q(n+1) = q(n) \end{cases}$$

$$\text{se } r(n) = 2q(n) + 1, \text{ então } \begin{cases} r(n+1) = 0 \\ q(n+1) = q(n) + 1 \end{cases}$$

Determine  $q(5)$  e  $r(5)$ .

20. Prove que  $\sqrt{2}$  e  $\sqrt{3}$  são irracionais.

21. Dado o conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$ , verifique dentre as relações abaixo quais são:

- reflexivas em  $A$ ; simétricas; simétricas em  $A$ ; anti-simétricas; anti-simétricas em  $A$ ; transitivas; transitivas em  $A$ ; de equivalência em  $A$ ; de ordem em  $A$

$$R_1 = \{(1, 1); R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}; R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\};$$

$$R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}; R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (1, 1), (3, 3)\};$$

$$R_6 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\}; R_7 = \{(1, 2), (1, 3)\};$$

$$R_8 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3)\}; R_9 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 4)\};$$

$$R_{10} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (1, 2)\}.$$

22. Seja  $A = \{a, b, c\}$ . Determine todas as relações de ordem em  $A$ , especificando as de ordem total e parcial.

23. Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ .

a) Determine as relações de equivalência em  $A$ .

- b) Determine  $[1]_{\mathbb{R}}$ ,  $[2]_{\mathbb{R}}$  e  $[3]_{\mathbb{R}}$  para cada uma destas relações.
- c) Determine o conjunto quociente  $\frac{A}{2}$  para cada uma destas relações.
- d) Determine as partições de A e compare com o item anterior.
- e) Determine  $\frac{A}{A^2}$ .

24. Ache as partições de  $A = \{a, b, c, d\}$ .

25. Determine o conjunto das partes (ou conjunto potência) de:

- a)  $S = \{1, 2, 3\}$ .
- b)  $S = \{8, \{1, 4\}\}$ .

26. Considere o número inteiro N, tal que  $N > 1$ . Sejam  $m_1$  e  $n_2$  dois números inteiros, positivos, distintos, não quadrados perfeitos, ambos situados no intervalo aberto  $(1, N^2)$ . Seja o número real d, tal que  $d = |\sqrt{n_1} - \sqrt{n_2}|$ . Calcule os valores máximo e mínimo de d, verificamos a seguir, se d é racional ou irracional.

27. Dados dois números reais a e b, definimos uma função f que chamamos “distância ao conjunto  $\{a, b\}$ ” da seguinte forma:  $f(x) = \text{distância de } x \text{ ao conjunto } \{a, b\} = \text{menor valor entre } |x - a| \text{ e } |x - b|$ . Esboce o gráfico de f para  $a = -1$  e  $b = 1$ .

### PROGRAMA IME ESPECIAL – DERIVAÇÃO

01. Derive as funções:

- a)  $y = e^{x^2 \operatorname{sen} x}$ ;
- b)  $y = \cos(\ln x^3)$ ;
- c)  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(L(3x^5))$ ;
- d)  $y = \sqrt{3x^3 - x + 1}$ ;
- e)  $y = \sqrt[3]{\frac{a - x^2}{a + x^2}}$ ;
- f)  $y = \operatorname{sen} x^3$ ;
- g)  $y = \operatorname{sen}^3 x$ ;
- h)  $y = \operatorname{sen}^3 x^3$ ;
- i)  $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{1 - x^2}$ .

02. Determine  $y'$ , utilizando derivada logarítmica.

- a)  $y = \frac{(x - a)^m}{(x - b)^n}$ ;
- b)  $y = x^x$ ;
- c)  $y = x^{x^x}$ ;
- d)  $y = (\operatorname{arc} \operatorname{cos} x)^x$ .

03. Determine uma equação da reta tangente às curvas abaixo nos pontos indicados.

- a)  $y = x^2$ ;  $x = 1$ ;

b)  $y = \operatorname{tg} x$ ;  $x = \frac{\pi}{4}$ ;

c)  $3xy^2 - 2x^3y + 10 = 0$ ;  $x = 2$ ;

d)  $2x^3 + 2y^2 - 3xy^2 - 3y = 0$ ;  $x = 1$ ;

e)  $\operatorname{sen} xy - y + x^2$ , ponto  $(0, 0)$ .

**04.** Determine o ângulo das curvas.

a)  $y = \operatorname{sen} x$  e  $y = \cos x$ ;

b)  $y = \frac{4}{x^2}$  e  $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ ;

c) circunferências  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$  e  $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$ .

**05.** Determine as equações das tangentes à curva  $y = x^2 - 2x$  que passam por  $(1, -2)$ .

**06.** Determine a condição a ser imposta a  $a$ ,  $b$  e  $c$  para que as curvas de equação  $y = x^2 + ax + b$  e  $y = cx - x^2$  sejam tangentes entre si.

**07.** Encontre equações das retas tangente e normal à curva  $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$  no ponto  $(2, 1)$ .

**08.** Determine  $dy/dx$  e  $d^2y/dx^2$  para as seguintes funções implícitas.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**09.** Sejam  $x = t^3 + 3t^2 - 2t + 1$  e  $y = x^4 - 3t^3 + 2t^2 - 1$  equações paramétricas de uma curva em  $\mathbb{R}^2$ .

a) Calcule  $dy/dx$  em  $t = 1$ ;

b) Ache a equação da reta tangente correspondente;

c) Calcule  $d^2y/dx^2$  em  $t = 1$ .

**10.** (CPRIME-84) Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x}$  no ponto  $(\frac{1}{2}, 2)$ .

**11.** (CPRIME-84) Usando derivação implícita, ache  $dy/dx$  na expressão  $x^3 - 3x^2y^4 + 4y^3 = 6x + 1$ .

**12.** (IME-73/74) Dado o conjunto de retas  $(5 + 2k)x - (2 + 3k)y - 12 + 4k = 0$ , calcule os valores de  $k$  tais que as retas correspondentes sejam tangentes à parábola  $y^2 = -16x$ .

**13.** (IME-75/76) Dada a curva  $(c)$ , de equação  $7x^2 + 13y^2 + 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$ , determine as equações das retas tangentes a  $(c)$  paralelas ao eixo  $y'y$  e os pontos de tangência.

**14.** (IME-79/80) Sejam  $g$  e  $f$  funções reais da variável real tais que a função completa  $g \circ f : x \rightarrow g(f(x))$  é definida para todo  $x$  real. Seja  $g'$  a derivada de  $g$ ,  $g'(y) = 3y^2 + e^y$ , e seja  $f$  a função definida por  $f(x) = 3x^2 + 3x + 5$ . Determine o valor da derivada da função  $g \circ f$  em  $x = 0$ .

15. (IME-83/84) Determine as equações da reta tangente e da reta normal à elipse  $4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y = 5$ , no ponto  $(4, 3)$ .

### LIMITES DE FUNÇÕES

01. Calcule (se existir).

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ .

02. (IME-76/77) Sejam  $f, g, h, j$  funções reais de variável real definidas como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in ]0, 3[ \\ x^2 - 7 & \text{se } x \in ]3, 7[ \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in ]0, 3[ \\ 2x + 3 & \text{se } x \in ]3, 7[ \end{cases};$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-4} & \text{se } x \in ]0, 3[ \\ x-2 & \text{se } x \in ]3, 7[ \end{cases}; \quad j(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in ]0, 3[ \\ x-1 & \text{se } x \in ]3, 7[ \end{cases}. \text{ Obtenha existir, o limite de cada função}$$

acima no ponto  $x = 3$ . Quando não existir o limite, determine o limite à esquerda, isto é, o limite quando  $x$  se aproxima de 3 por valores inferiores a 3.

03. Calcule (se existir).

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{4-x^2}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^3+4}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-1}{5x^3+2x}$ ;

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-2}{2x^3-1}$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^6+3x-1}}{x^3-x^2+4}$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-7}{\sqrt{3x^2-5}}$ ;

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ ;

i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$ ;

j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+5x^2-1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+x})$ .

04. Calcule (se existir).

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^2}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} x$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ;
- f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ ;
- g)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ;
- h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ ;
- i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$ ;
- j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen} x$ ;
- k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x^2}$ .

05. (IME-75/76) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right]$ .

06. (IME-79/80) Determine  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}$ .

07. (CPRIME-84) Usando a regra de L'Hôpital, calcule o  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} \right)$ .

08. Calcule (se existir).

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{2}{x^2}}$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x+5} \right)^{2x}$ ;
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$ .

09. (IME-78/79) Seja  $t$  a função definida por:  $t(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ,  $x > 0$ . Determine:

a)  $l = \lim_{x \rightarrow 0} t(x)$ ;

b)  $h = \lim_{x \rightarrow \infty} t(x)$ .

10. (IME-77/78) Calcule  $\lim_{x \rightarrow e} \left[ (\ln x)^{\frac{1}{x-e}} \right]$ .

11. (IME-75/76) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (\cos x)^{\cot g \frac{\pi x}{2}} \right]$ .

12. Calcule.

a)  $\lim_{0^+} x^{\sin x}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ .

### CONTINUIDADE - DIFERENCIABILIDADE

01. Analise a continuidade das funções abaixo nos pontos indicados.

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{6}, & x = 0 \end{cases}$ ;

c)  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0. \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

02. Determine, se possível, o valor dos parâmetros  $a$  e  $b$  para que as funções abaixo sejam contínuas nos pontos indicados.

a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos 3x}{4x^2}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0. \\ 2 \cos x, & x > 0 \end{cases}$   
 $x_0 = 0$  e  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$

03. Usando o TVI, mostre que o polinômio  $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 3$  possui pelo menos uma raiz entre 1 e 2.

04. Determine a função derivada das funções a seguir, evidenciando, se existir,  $f'(0)$ . Verifique também a função derivada é contínua no ponto  $x = 0$ .

a)  $f(x) = |x|$ ;

b)  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ \end{cases}$

c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ \end{cases}$

d)  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ;

e)  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0. \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ .

05. (IME-77/78) Seja a função  $f$ , real de variável real, definida como  $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax, & \text{se } x \leq 1 \\ bx^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ .

Determine "a" e "b", ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) para que  $f$  seja derivável no ponto  $x = 1$ .

06. (IME-83/84) Considere a função  $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \begin{cases} x(1+x)^{\frac{1}{x}}, & -1 < x, x \neq 0. \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

a) Calcule a derivada desta função no ponto  $x = 0$ .

b) Verifique se a função derivada é contínua no ponto  $x = 0$ .

07. (CPRIME-82) Um ponto  $x_0$  é dito máximo de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se, dado  $h \in \mathbb{R}$ , se tiver  $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ . Mostre que se  $f$  é derivável em um ponto de máximo tem-se  $f'(x_0) = 0$ .

### TEOREMA DE ROLLE – TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM)

01. (CPRIME-84) Mostre que as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas para as funções  $f$  dadas abaixo no intervalo  $(a, b)$ . Ache o valor de  $c$  no intervalo aberto  $(a, b)$  para o qual  $f'(c) = 0$ .

a)  $f(x) = 6x^2 - x^3$ ;  $(a, b) = (0, 6)$ ;

b)  $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$ ;  $(a, b) = (0, 3)$ .

02. (IME-76/77) Seja o polinômio  $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  onde  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $a_0 \neq 0$ , cujas "n" raízes são reais e distintas. Sabendo-se que o polinômio  $f'$  (derivada de  $f$  com relação a  $x$ ) tem  $n - 1$  raízes, demonstre que essas  $n - 1$  raízes são reais e distintas.

**03.** (CPRIME-82) Sabe-se que entre duas raízes consecutivas de  $f'$  existe no máximo uma raiz de  $f$ . Usando tal fato, mostre que o polinômio  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$  possui exatamente uma raiz no intervalo  $(1, 3)$ .

**04.** (IME-78/79) Sabe-se que, dados um intervalo fechado  $[a, b]$ ,  $a < b$ , e uma função  $f$  definida e contínua  $[a, b]$  e diferenciável no interior de  $[a, b]$ , existe um ponto  $c \in ]a, b[$ , tal que se tem  $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$ . Dada a função  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \sqrt{x}$ , determine, caso exista, o ponto  $c$  nas condições acima.

**05.** (IME-74/75) Se uma função  $f$  é derivável em um intervalo fechado  $[a, b]$  e se  $c \in [a, b]$ , então:  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ .

a) Faça uma figura explicativa do Teorema acima, interprete-o geometricamente e dê um nome segundo o qual ele é conhecido;

b) Particularizando o Teorema, para a função e o intervalo fechado definidos abaixo.

$f(x) = x^3$ , e,  $[a, b] = [0, 2]$  calcule o valor de  $c$  e determine a equação da tangente em  $c$ .

**06.** (CPRIME-82) Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Mostre que dado  $h \in \mathbb{R}$ , arbitrário, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = h f(c)$ . (Sugestão: considere a função  $\varphi(x) = f(x) e^{-hx}$  e aplique o Teorema de Rolle).

### MÁXIMOS E MÍNIMOS – CRESCIMENTO

### CONCAVIDADE – ASSÍNTOTAS - GRÁFICO

**01.** Analise crescimento, decrescimento e máximo e mínimo relativos.

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ ;

b)  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ ;

c)  $f(x) = \operatorname{tg} x - 8 \operatorname{sen} x$ ;

d)  $f(x) = x\sqrt{2x - x^2}$ .

**02.** Dada a função  $g$  tal que  $g(x) = A x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ , determine a constante  $A$  para que o valor máximo de  $g$  seja 1.

**03.** (IME-74/75) Ache as dimensões do retângulo de área máxima que tenha dois vértices sobre a reta  $x = a$  e os outros dois sobre a parábola  $y^2 = 2px$ .

**04.** (IME-80/81) Um triângulo retângulo, de hipotenusa  $p - b$  e catetos  $b$  e  $c$ , onde  $p$  é constante, girar em torno de  $c$  gerando um cone. Que valor deve ser dado a  $b$  para que o volume do cone seja máximo?

**05.** (IME-77/78) Sobre o eixo dos  $x$  tem-se dois pontos  $A$  e  $B$  de abscissas  $a$  e  $b$ , respectivamente ( $b > a > 0$ ). Achar um ponto  $P$  sobre o eixo  $y$  tal que o ângulo  $\widehat{APB}$  seja máximo.

**06.** (IME-83/84) Determine, entre todos os triângulos retângulos cuja hipotenusa é igual a  $H$ , o que tem área máxima.

**07.** (IME-78/79) Ache as dimensões do retângulo de área que se pode inscrever no interior da região limitada pela parábola  $y^2 = 8x$  e pela reta  $x = 8$ , com um dos lados apoiado na reta  $x = 8$ .

08. (IME-76/77) Considere a curva de equação  $y = \frac{x^2}{x}$ . Determine as coordenadas do ponto desta curva mais próximos do ponto de coordenadas (4, 1).

09. Determinar os pontos de inflexão das seguintes funções:

a)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ;

b)  $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ .

10. (CPRIME-81) Determine os pontos de inflexão  $y = e^{-x^2}$ .

11. Ache todas as assíntotas das funções abaixo.

a)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ;

b)  $f(x) = \frac{3x^3 - 5x^2 + 1}{x^3 + 5x^2}$ ;

c)  $f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$ .

11. (IME-75/76) Seja  $y = \frac{(x-2)^2}{x^2}$  a equação de uma curva C. Determine, caso existam, suas assíntotas, seus pontos de máximo e mínimo, seus pontos de inflexão, os pontos onde C encontra o eixo  $x'x$  e faça um esboço de C onde estejam indicados os pontos e as retas acima referidas.

12. (IME-74/75) Estude a variação da função  $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}$ , determine seus pontos de máximo e de mínimo, de inflexão e as assíntotas. Trace um esboço da função, assinalando os pontos acima aludidos e as assíntotas, concluindo, a seguir, sobre a existência ou não de alguma região para a qual  $y < 0$ .

13. (IME-83/84) Dada a função definida nos reais por  $y = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$  determine:

- a) zeros da função;
- b) intervalos onde a função é crescente ou decrescente;
- c) pontos de máximo e mínimo;
- d) pontos onde a derivada primeira não é definida;
- e) concavidade do gráfico da função.

14. (IME-79/80) Seja a função  $y$  definida por  $y(x) = (3 \operatorname{sen} x + 4) \operatorname{sen} x - \cos^2 x$ , para todo número real  $x$ .

- a) É a função  $y$  crescente ou decrescente nos pontos  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ ?
- b) Qual é a concavidade de  $y$  nos pontos acima?

### COMPLEMENTOS

16. Determine as assíntotas da função  $f$  tal que  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

17. Esboce o gráfico das funções abaixo:

a)  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ ;

b)  $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$ ;

c)  $y = x^2 e^x$ ;

d)  $y = x^x$  ( $x > 0$ ).

### PROGRAMA IME-ESPECIAL/1989 - LIMITES

01. (IME-76/77) Sendo  $x \in \mathbb{R}$ , calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sqrt{\cos x}$ .

02. (IME-77/78) Para  $r > 0$  e  $x > 1$ , defina a função  $f_t$ , real de variável real, como:

$f_t(x) = x \left[ \frac{x^t - (t+1)}{t} \right]$ . Supondo-se que o limite indicado exista, define-se  $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f_t(x)$ ,  $x > 1$ .

Determine  $f(e^2)$ , onde  $e$  é base dos logaritmos neperianos.

03. (IME-78/79) Calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^x$ .

04. (IME-82/83) Considere a função  $f$  definida nos reais por:  $f(x) = (x-1)\ln(x-1) - x \ln x$ . Dê seu domínio e calcule  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

05. (IME-80/81) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)}$ .

06. (IME) Calcule  $\lim_0 (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}$ .

07. (IME-86/87) Calcule os valores das constantes  $a$  e  $b$  tais que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} 3x + ax + bx^3}{x^3} \right) = 0$ .

08. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi}{2-ax} \right) \right]^{\operatorname{sec}^2 \left( \frac{\pi}{2-bx} \right)}$ .

09. Calcule, se existir:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ ;

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a}{n} \right)^n$ ;

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+kn)^{\frac{1}{n}}$ ;

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^{5n}$ .

10. (IME) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^{\frac{1}{n}} + 2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}}}{3} \right]^n$ .

11. (IME-88/89) Seja  $0 < a < b$ . Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ .

12. (IME-87/88) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{1+2\ln \frac{1}{n}}}$ , onde  $\ln$  denota logaritmo neperiano.

13. Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2})$ .

14. Seja  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ . Verifique se  $f$  é contínua, ache  $f'$  e verifique se  $f'$  é contínua.

### INTEGRAÇÃO - PROGRAMA IME-ESPECIAL

01. Resolva os seguintes integrais indefinidos.

i)  $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$ ;

ii)  $\int \frac{2x+15}{x^2} dx$ ;

iii)  $\int x \sin 2x^2 dx$ ;

iv)  $\int \frac{y dy}{\sqrt{2y^2+1}}$ ;

v)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;

vi)  $\int \frac{z+1}{\sqrt[3]{z^2+2z+2}} dz$ ;

vii)  $\int t^2(1+2t^3)^{-\frac{2}{3}} dt$ ;

viii)  $\int \sin^3 \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} dy$ ;

ix)  $\int x e^{x^2} dx$ ;

x)  $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$ ;

xi)  $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ ;

xii)  $\int \operatorname{tg} x dx$ ;

xiii)  $\int e^x \operatorname{tg}(e^x) dx$ ;

- xiv)  $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$  ;
- xv)  $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$  ;
- xvi)  $\int \cos^2 \theta d\theta$  ;
- xvii)  $\int \cos^3 \theta d\theta$  ;
- xviii)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$  ;
- xix)  $\int x\sqrt{1+x} dx$  ;
- xx)  $\int x e^x dx$  ;
- xxi)  $\int x^2 \sin x dx$  ;
- xxii)  $\int x \ln x dx$  ;
- xxiii)  $\int e^x \ln x dx$  ;
- xxiv)  $\int \arctg x dx$  ;
- xxv)  $\int \arcsen x dx$  ;
- xxvi)  $\int \frac{x^3 + 1}{x - 2} dx$  ;
- xxvii)  $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$  ;
- xxviii)  $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$  .

**02.** (IME-mil) Calcule  $y(x) = \int x^2 \arctg x dx$  .

**03.** (IME-65) Sendo  $m$  um número real maior que 1, calcule  $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^m}$  .

**04.** (IME-mil) Calcule, usando a substituição  $x = \sin t$  ,  $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  .

**05.** (IME-mil) O gráfico ao lado mostra a figura A, compreendida entre a reta  $y = x$  e a parábola  $y = -x^2$  .

figura

Calcule a área da figura A.

**06.** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  . Definimos  $\min \{f, g\}$  como sendo a função  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  . Se  $f(x) = x^2 + 3$  e  $g(x) = 4x$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  , calcule  $\int_0^4 \min\{f, g\} dx$  .

**07.** (IME-64) Determine a área da superfície limitada pela curva  $y = -2x^2 + 2x + 12$  e pela reta  $2x - y + 4 = 0$  .

08. (IME-65) Calcular a soma das áreas das superfícies finitas limitadas pelos gráficos da curva  $x^2 + 2y = 0$  e das assíntotas da hipérbole  $4x^2 - y^2 + 16 = 0$ .

09. (IME-66) Determine o valor numérico da área delimitada pelas curvas  $x + 2y = 3$  e  $x = y^2 - 3y + 1$ .

10. Ache a área da região delimitada por  $x = y^2$  e  $x + 2y - 3 = 0$ .

11. (IME-77/78) Dadas as parábolas  $y_1$  e  $y_2$ ,  $y_1(x) = 51 - x^2$  e  $y_2(x) = x^2 + 1$ , sabe-se que a área entre  $y_1$  e  $y_2$ , medida entre  $x = 0$  e  $x = 6$ , é igual a 3 vezes a área entre  $y_1$  e  $y_2$ , medida entre  $x = 5$  e  $x = 4$ . Determine  $a$ .

12. Seja  $R$  a região dos pontos  $(x_1, x_2)$  do plano, delimitada pelas inequações  $x_1^2 - 4x_1 + 4x_2 - 24 < 0$ ;  $x_2 - x_1 - 3 > 0$ ;  $x_1 > 0$ ;  $x_2 > 0$ . Calcular a área de  $R$ .

13. Determinar a área da região compreendida entre as curvas:

a)  $f(x) = x^3 - 2x$ ;  $g(x) = x^2$ ;

b)  $y^2 = 2x$ ;  $x^2 = 2y$ ;

c)  $x^2 + y^2 = 16$ ;  $y = \frac{x^2}{6}$ ;

d)  $y = \operatorname{tg}^2 x$ ; eixo  $Ox$ ; reta  $x = \frac{\pi}{4}$ ;

e)  $y = 3x^2 - 2x - 1$ ; eixo  $Ox$ ;  $x = -1$ ;  $x = 0$ .

14. (IME-76/77) Sejam as regiões definidas pelos conjuntos de pontos  $A$  e  $B$ , onde  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < mx, m \in \mathbb{R}^+\}$  e  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < ny, n \in \mathbb{R}^+\}$ . Determine a área do conjunto  $C = A \cap B$ .

15. (IME-78/79) Calcule a área da superfície finita entre as curvas de equação  $y = 16 - x^4$  e  $y = x^4 - 5x^2 + 4$ .

16. (IME-81/82)(mil) Determine  $m$  tal que a região acima da reta  $y = mx$  e abaixo da parábola  $y = x - x^2$  tenha uma área de 36 unidades.

17. (IME-80/81 – mil) Calcule a área limitada pelo eixo das  $x$ , a curva  $y = x(\ln x)^2$  e as retas  $x = 1$  e  $x = e$ .

18. Determine a área da região interna à curva fechada  $y^2 = x^2 - x^4$ .

19. (IME-66) Calcule o limite das seqüências abaixo.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$  ( $p > -1$ );

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \operatorname{sen} \frac{1}{n} + \operatorname{sen} \frac{2}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{n}{n} \right]$ .

20. (CPRIME-84) Determine a área da região sob a curva  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$  entre  $x = -\sqrt{2}$  e  $x = \sqrt{2}$ .

21. (CPRIME-84) Calcule o valor médio da função  $f(x) = x^2$  no intervalo  $[1, 4]$  e determine um valor de  $c$  neste intervalo tal que  $f(c)$  dê seu valor médio.

22. Ache a derivada das funções a seguir:

a)  $F(x) = \int_x^{x^2} 2t dt$ ;

b)  $f(x) = \int_x^{x^2} \sin t^3 dt$ ;

c)  $y = \int_1^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ ;

d)  $y = \int_2^{\sqrt{x}} (1+t^4) dt$ .

23. (IME-74/75 – mil) As variáveis  $x$  e  $y$  estão relacionadas pela equação  $x = \int_b^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$ . Sabendo-se que  $\frac{d^2y}{dx^2}$  é proporcional a  $y$ , determine a constante desta proporcionalidade.

24. (IME-65) Dada a função  $F(x) = 1 + 2x + |x - 1|$ , pede-se calcular a integral definida de  $F(x)$  entre os limites  $-1$  e  $2$ .

25. (IME-67) Calcule, entre os limites  $-0,7$  e  $0,8$ , a integral da função definida por  $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + x^n}$ .

26. (IME-67) Calcule  $\lim_{y \rightarrow a} \frac{ay}{y-a} \int_a^y e^x dx$ . ( $a$  é uma constante; e é a base dos logaritmos neperianos).

27. (IME-67) Seja a função  $F$  definida por  $F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq 1 \\ |3x - 5|, & x > 1 \end{cases}$ . Sabe-se que:

i) a função  $F$  é contínua sobre seu conjunto de definição;

ii)  $\int_0^1 F(x) dx = 1,5$ ;

iii) a função primeira derivada de  $F$  é descontínua apenas em um número do conjunto dos reais. Pede-se determinar os números  $a, b, c$ .

28. (IME-68) Seja  $f$  uma função real de variável real tal que:

$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ . Determine a função  $F$ , real de variável real, cuja derivada seja  $f$ , de modo que  $F(0) = 0$ .

29. (CPRIME-82) Define-se a função logaritmo como  $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ , para  $x > 0$ ; mostre que  $\log xy = \log x + \log y$  e que  $\log (x^r) = r \log x$ , onde  $r$  é um número racional.