

Lista 1 de Lugar Geométrico e Geometria Analítica estilo IME e ITA

Prof. Filipe Rodrigues – www.rumoaota.com

1-) (IME-89) Um ponto se move de modo que, o quadrado de sua distância à base de um triângulo isósceles é igual ao produto de suas distâncias aos outros dois lados do triângulo. Determine a equação da trajetória deste ponto: identificando a curva descrita e seus respectivos parâmetros.

2-) (IME-89) Dada a equação:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m+1)y + 3m + 14 = 0$$

a) Determine os valores de m , para que esta equação corresponda a um círculo.

b) Determine o lugar geométrico dos centros desses círculos.

3-) (IME-89) Seja ABCD um trapézio cuja base maior $AB = a$ é fixa e cuja base $CD = b$. A soma dos lados não paralelos é constante e igual a l . Os prolongamentos dos lados não paralelos se cortam em I .

a) Demonstre que o LG descrito pelo ponto I é uma cônica.

b) Determine eixos e distância focal.

4-) (IME-89) Seja uma elipse cujo eixo maior $AA' = 2^a$ e cuja excentricidade é $0,5$. Seja F o foco da elipse, correspondente ao vértice A . Considere a parábola, cujo vértice é o ponto O , centro da elipse e cujo foco coincide com o foco F da elipse. Determine o ângulo entre as duas curvas nos pontos de intersecção.

5-) (IME-89) São dados um segmento AB e os pontos C e D , que o dividem interna e externamente numa mesma razão. Mostre que as circunferências de diâmetro AB e CD são ortogonais.

6-) (IME-90) Considere a família de retas representadas pela

equação: $y = mx - \frac{p(1+m^2)}{2m}$, onde p é uma constante positiva

dada e m um número real variável.

a) Determine a condição para que num ponto $M = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, passem duas retas dessa família.

b) Determine o LG dos pontos M para os quais as retas que por eles passem sejam perpendiculares.

7-) (IME-90) Na elipse de excentricidade $0,5$, foco na origem e reta diretriz dada por $3x + 4y = 25$, determine:

a) os vértices da elipse

b) o outro foco

c) a equação da outra reta diretriz

8-) (IME-91) Determine o quadrado OABC cujos vértices são a origem e os pontos $A(1, 1)$; $B(0, 2)$; $C(-1, 1)$. Seja $F(0, 1)$ o centro desse quadrado e (P) a parábola de foco F e cuja diretriz é o eixo das abscissas. Pede-se:

a) Mostre que (P) passa por A e por C .

b) Determine a equação dessa parábola.

c) Calcule as coordenadas do ponto D , segundo ponto de intersecção da reta BC com (P) .

d) Seja M um ponto qualquer de (P) cuja abscissa é x . Mostre que a potência de M em relação ao círculo de diâmetro CD é:

$$\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3)$$

9-) (IME-91) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num mesmo plano. Determine o lugar geométrico dos centros que são tangentes exteriormente ao círculo dado e à reta dada.

10-) (IME-91) Sejam um círculo \odot com centro O e raio R e um ponto P tal que $OP = 3R$.

a) Determine um diâmetro MN de modo que o triângulo PMN seja retângulo com ângulo reto em M .

b) Calcule, em função de R , os lados e a área do triângulo PMN .

c) PN intercepta a circunferência em um segundo ponto K .

Calcule PK .

d) O diâmetro MN gira em torno de O . Qual o LG dos pés das perpendiculares traçadas de P sobre MN ?

e) Determine a posição do diâmetro MN para que a área do triângulo PMN seja máxima.

11-) (IME-93) Demonstre analiticamente que se uma reta perpendicular a uma corda de uma circunferência, passa pelo seu centro, então ela divide a corda no seu ponto médio.

12-) (IME-94) Seja $y = \frac{x^2}{2}$ uma parábola com foco F e diretriz d .

Uma reta cujo coeficiente angular é $m \neq 0$, passa por F e corta a parábola em dois pontos M_1 e M_2 , respectivamente. Seja G o conjugado harmônico de F em relação a M_1 e M_2 . Pede-se:

a) As coordenadas de G em função de m .

b) O lugar geométrico do ponto G quando m varia.

13-) (IME-95) Seja ABC um triângulo qualquer no qual os vértices B e C são fixos. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto A , variável, sabendo que os ângulos B e C satisfazem à relação $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = k$, k constante real.

Discuta a solução para os diversos valores de k .

Sugestão: Considere como eixos coordenados as retas BC e a mediatriz do segmento BC .

14-) (IME-96) Um triângulo ABC tem base AB fixa sobre uma reta r . O vértice C desloca-se ao longo de uma reta s , paralela a r e a uma distância h da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo ABC .

15-) (IME-97) Dados os pontos A e B do plano, determine a equação do lugar geométrico dos pontos P do plano, de tal modo que a razão entre as distâncias de P a A e de P a B seja dada por uma constante k . Justifique a sua resposta analiticamente, discutindo todas as possibilidades para k .

16-) (IME-98) Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O de um sistema de coordenadas cartesianas, com eixo focal coincidente com o eixo Ox . Os focos da elipse são os vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são os vértices da

elipse. Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3} \text{ cm}$,

determine as equações das parábolas, que passam pelas

intersecções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo Ou na origem.