ELITE
PRÉ-VESTIBULAR
c a m p i n a s

IME 2007

DICAS PARA A PROVA DE MATEMÁTICA

www.elitecampinas.com.br

(19) 3251 1012

CONHEÇA O PROCESSO SELETIVO – IME 2007

O IME é conhecido por ter um dos exames mais desafiantes do país. O ingresso é fruto de muito esforço dos candidatos, mas não é uma missão impossível. O grau de complexidade dos conteúdos cobrados e das questões é propositalmente elevado para selecionar apenas aqueles candidatos melhor preparados e que estão decididos a entrar em uma instituição reconhecida como uma das melhores engenharias do país, ao lado do ITA.

Nos propomos com este material a passar algumas dicas para o melhor rendimento neste exame que está por vir, lhe acompanhando dia a dia com resumos de tópicos não tão enfatizados (e até mesmo não vistos) no ensino médio. Estes tópicos fazem parte da filosofia do vestibular: cobrar cada vez assuntos mais específicos, para valorizar aquele candidato que se preparou exclusivamente para este vestibular.

Para ajudá-lo, analisamos os anos anteriores e fizemos nossas apostas. A cada dia, você ganhará um resumo, que irá lhe ajudar em algumas questões que possuem alta probabilidade de serem cobradas. Estes resumos estarão também disponíveis em nosso site (www.elitecampinas.com.br), bem como a resolução das provas que você realizou.

DICAS IMPORTANTES

De maneira geral, para as questões dissertativas do vestibular do IME, o candidato deve necessariamente esclarecer como chegou à resposta. Na correção é dado ponto parcial, ou seja, ele pode conseguir algum ponto por resolver apenas parte da questão. Por isso, é importante não deixar nenhuma questão em branco

Um bom plano de prova é fundamental. Para administrar bem o tempo, candidato deve começar a prova pelas questões mais fáceis. Elas tem o mesmo valor das difíceis e por isso, não perca tempo em questões muito complexas, deixando pouco tempo (e eventualmente nenhum) para as mais simples.

É importante ressaltar que o IME está com uma nova proposta neste ano, para minimizar o trabalho com a correção: uma prova objetiva foi inserida no calendário. Somente serão corrigidas as provas dos candidatos que tiverem nota superior a 50% no primeiro dia. Outro critério de desclassificação do candidato é a não obtenção de 40% em qualquer prova, ou se a média total ficar inferior a 50%.

Para o cálculo da média, leva-se em conta pesos diferenciados para cada prova:

Matéria	Peso
Prova objetiva de Matemática, Física e Química	1,0
Prova discursiva de Matemática	3,0
Prova discursiva de Física	2,0
Prova discursiva de Química	2,0
Prova discursiva de Português	1,0
Prova discursiva de Inglês	1,0

Apesar destas informações, só se preocupe com a sua nota após os exames. Mesmo se você acha que não atingiu os critérios mínimos em uma prova, não abandone o concurso. Primeiro porque você não tem certeza: questões podem ser anuladas, correções podem ser brandas. Segundo porque, mesmo se você não passar este ano, não existe melhor treino para o vestibular que o próprio vestibular. No mínimo você estará ganhando experiência, diminuindo o nervosismo e até aprendendo!

Você deve se concentrar nas prova dia a dia. As provas anteriores já foram e você não tem como mudar suas respostas. As posteriores, encare quando vier. Se sua preparação foi boa, não importa o nível de dificuldade: você sabe a matéria! Tenha o mesmo pensamento ao resolver as questões. Cada uma é um desafio que será superado por você.

Você está preparado para encarar este desafio. Para auxiliá-lo, segue a seguir um resumo teórico do que tem maior probabilidade de ser cobrado na prova de amanhã do IME de 2007. Bons estudos!

A MATEMÁTICA NO IME

Só uma palavra define a prova de Matemática do IME: bela. Essa prova possui exercícios que exigem grande conhecimento e domínio da matéria por parte dos candidatos, e normalmente apresenta alguns problemas que conseguem desafiar até mesmo as mentes mais bem preparadas Claro que isso não significa que a prova é impossível de ser resolvida, mas com certeza é um desafio tentador.

A partir de uma análise rápida dos últimos anos, notamos que certos temas estão sempre fadados a aparecer. A prova é bastante variada, mas notamos que temas como **polinômios**, **logaritmos** (normalmente misturados com outros temas tais como determinantes, sistemas lineares, etc.), **teoria dos números** e **seqüências** (principalmente progressão aritmética) aparecem com uma freqüência assustadora. Isso porque nem sequer citamos as questões de geometria plana e trigonometria que com certeza estarão presentes na prova.

Mas provavelmente você já estudou cada um desses temas, e sabe que existem vários livros muito bons sobre cada um desses assuntos. Entretanto, existem alguns detalhes que caem nas provas que exigem determinados cuidados por parte do candidato, detalhes que não aparecem em vários livros. Como exemplo, basta observar que nos últimos 6 anos, palavras como **demonstre**, **prove** e **mostre** foram citadas aproximadamente 22 vezes, uma média de quase 4 itens por ano. Proporcionalmente, é mais fácil aparecer um item com a palavra "demonstre" do que um item com um polinômio!

A última prova do IME não apresentou nenhuma questão de demonstração, o que fortalece ainda mais as chances de que este ano essas questões apareçam. Por isso, boa leitura!

Além da parte de demonstrações, este material também traz formulários de trigonometria, logaritmos e cônicas (assuntos que são abordados em praticamente todas as provas do IME), além da relação de Stewart, que é extremamente prática em alguns problemas de geometria plana.

COMO É QUE EU PROVO ISSO???

Bom, todos nós um dia nos deparamos com algum exercício do tipo "prove que" ou "demonstre que". E, provavelmente, a pergunta "como é que eu provo isso?" com certeza já foi feita em alguma dessas situações.

Exercícios de demonstração têm duas partes fundamentais: uma *hipótese* e uma *tese*. A **tese** é o que queremos provar, por isso, enquanto não for provada, jamais pode ser encarada como verdadeira. Já a nossa **hipótese** normalmente é algo que o exercício nos fornece como verdadeiro, e é o ponto de partida que temos para nossa demonstração.

Em resumo:

Hipótese $\rightarrow$ base da nossa demonstração (pode ser encarado como verdadeiro no exercício).
Tese $\rightarrow$ é o que queremos provar.

Assim, se a partir da sua hipótese você conseguir, através de uma série de processos lógicos, mostrar que sua tese é verdadeira, então você conseguiu *demonstrar* essa tese. Em resumo, o processo de demonstração está baseado na seguinte seqüência:

hipótese $\rightarrow$ **processos lógicos** $\rightarrow$ **tese**

Obs: nem sempre o exercício fornecerá uma hipótese. Nesses casos podemos utilizar como hipótese qualquer fato reconhecidamente verdadeiro sobre o assunto.

Normalmente, trabalhamos com hipóteses que são, matematicamente falando, razoáveis. No entanto, no processo de demonstração, podemos nos deparar com teses **totalmente absurdas**. Nem sempre será necessário demonstrar, às vezes, podemos encontrar algo que chamamos **contra-exemplo**, ou seja, podemos, através de exemplificação, mostrar que a nossa tese é absurda.

Exemplos:

1. Prove ou dê um contra-exemplo: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

Hipótese: não foi fornecida

Tese: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Observe que nesse exercício não temos uma hipótese para o início da demonstração. Dessa forma, qual seria então uma hipótese razoável para iniciarmos nossa demonstração? Como sugestão, lembre-se que sempre é verdade que $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$. Vamos utilizar esse fato como hipótese. A partir dessa hipótese, perceba que, caso nossa tese seja verdadeira então $a^2 + 2.a.b + b^2 = a^2 + b^2$. Porém, se isso for verdade, temos então que $2.a.b = 0$ .Bem, em momento algum foi dito que isso teria que acontecer! Assim, provavelmente deve existir algum CONTRA-EXEMPLO. Tomando $a = b = 1$, temos que $(a+b)^2 = (1+1)^2 = 4$, enquanto que $a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, ou seja, encontramos um exemplo no qual nossa tese não é verdadeira.

2. Prove que se $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

Hipótese: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Tese: $a = 0$ ou $b = 0$

Em nosso exercício, essa hipótese é uma VERDADE ABSOLUTA. Mesmo com uma hipótese aparentemente estranha, as regras matemáticas continuam válidas. Assim, ainda é verdade que $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$. Dessa forma, temos então que:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + 2.a.b + b^2 - a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow 2.a.b = 0$$

A partir de processos lógicos encontramos então que, caso $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ então $2.a.b = 0$. Bem, a multiplicação de dois números só é nula quando um deles for zero, logo, se $2.a.b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$. Considerando a cadeia de implicações $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 2.a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$, temos então que necessariamente $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$, e nossa tese está provada.

REDUÇÃO AO ABSURDO

Um modo extremamente conhecido de demonstração é chamado de **redução ao absurdo**. Esse processo é baseado nas seguintes etapas:
1. analisamos nossa hipótese e nossa tese;
2. supomos que nossa tese é FALSA;
3. a partir de processos lógicos, acabamos por obter algum resultado que é absurdo.

Se isso ocorre, ou seja, se a partir do fato de transformarmos nossa tese em uma coisa supostamente falsa encontramos um resultado que é absurdo, então nossa tese deve ser verdadeira, e então ela está provada.

Exemplo: prove que existem infinitos números primos.

Tese: existem infinitos números primos.

Suponha justamente o contrário, ou seja, suponha que existe um número finito de números primos. Assim, seja $\{2,3,5,7,...p\}$ o conjunto de todos os números primos existentes. Dessa forma, seja então N o número formado pelo produto de todos esses números, ou seja,

$$N = 2 \times 3 \times ... \times p$$

Bom, esse número é composto e é divisível por todos os números primos. Porém, e o número $N+1$? O que podemos falar sobre ele? Ora, o número $N+1$, quando dividido por 2, dá resto 1. Da mesma forma, quando for dividido por 3, dá resto 1. Além disso, quando esse número for dividido por p, também teremos resto 1. Assim, $N+1$ não é divisível por nenhum número além dele mesmo e do número 1, logo, $N+1$ é um número primo. Porém nós partimos do princípio de que p era o nosso último número primo, e isso nos gera um ABSURDO. Assim, devem existir então infinitos números primos.

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O processo de indução finita é, provavelmente, o modo mais interessante de se provar exercícios normalmente relacionados com propriedades de números inteiros. Ele é um método simples, porém muito eficaz de prova, baseado em 3 etapas:
1. mostra-se que a tese é válida para algum número qualquer;
2. supõe-se que para o valor **k** nossa tese é verdadeira (essa será nossa nova hipótese);
3. se a propriedade continuar válida para **k+1** então ela é válida para qualquer número natural.

Exemplo: mostre que $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Vamos seguir cada etapa:

1) Se n = 1, temos que $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$.

2) Vamos supor que $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

Como $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$, temos, somando (k+1) em ambos os lados:

$$(1+2+...+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\Rightarrow 1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Lembrando que $k+2=(k+1)+1$, temos então:

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Isso comprova que a fórmula continua válida para **k+1**. Assim, ela é válida para qualquer que seja **n** natural.

IME 2004 - EXEMPLO DE DEMONSTRAÇÃO

A prova de 2004 apresentou uma questão interessante, de dificuldade média, cujo enunciado é o seguinte:

QUESTÃO:

Considere o polinômio $P(x)=x^3+ax+b$ *de coeficientes reais, com* $b\neq 0$. *Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que a < 0.*

SOLUÇÃO

Aqui, temos:

Hipótese: as raízes de P(x) são reais

Tese: a < 0

Como regra geral, nós nunca admitimos inicialmente que nossa tese é verdadeira. Com isso em mente, sejam então **r**, **s** e **t** as raízes de P(x), que por hipótese são números reais. Através das relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r+s+t=0 \\ r.s+t.t+s.t=a \\ r.s.t=-b \end{cases}$$

Como $b\neq 0$, temos que $r.s.t\neq 0$, e assim r, s e t são diferentes de zero. Elevando agora ambos os membros da primeira equação ao quadrado, temos:

$$(r+s+t)^2=0\Rightarrow r^2+s^2+t^2+2.(r.s+s.t+r.t)=0$$

$$r^2+s^2+t^2+2.a=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}(r^2+s^2+t^2)$$

Como r, s e t são reais (hipótese) e não-nulos, segue então que:

$$r^2+s^2+t^2>0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}(r^2+s^2+t^2)<0\Rightarrow a<0.$$

FORMULÁRIO DE TRIGONOMETRIA

Fórmulas básicas:

$$tgx=\frac{senx}{\cos x} \qquad \sec x=\frac{1}{\cos x} \qquad sen^2x+\cos^2 x=1$$

$$\cot gx=\frac{\cos x}{senx}=\frac{1}{tgx} \qquad \cos ecx=\frac{1}{senx} \qquad tg^2x+1=\sec^2 x \qquad \cot g^2x+1=\cos ec^2x$$

Soma e subtração de arcos

$$sen(a+b)=sen\,a.\cos b+sen\,b.\cos a$$
$$sen(a-b)=sen\,a.\cos b-sen\,b.\cos a$$
$$\cos(a+b)=\cos a.cob-sen\,a.sen\,b$$
$$\cos(a-b)=\cos a.cob+sen\,a.sen\,b$$

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga.tgb}$$
$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga.tgb}$$

Arco duplo

$$\cos 2x=\cos^2 x-sen^2x$$
$$\cos 2x=2.\cos^2 x-1$$
$$\cos 2x=1-2sen^2x$$
$$sen\,2x=2.senx.\cos x$$

Arco triplo

$$sen\,3x=3.sen\,x-4.sen^3x$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3.\cos x$$

Arco metade

$$sen\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Transformação de soma em produto (muito importante)

$$sen\,p+sen\,q=2.sen\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$sen\,p-sen\,q=2.sen\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2.\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2.sen\frac{p+q}{2}sen\frac{p-q}{2}$$

$$tgp+tgq=\frac{sen(p+q)}{\cos p.\cos q}$$
$$tgp-tgq=\frac{sen(p-q)}{\cos p.\cos q}$$

IME 2005 – UM EXEMPLO DE TRIGONOMETRIA

Para ilustrar a importância da trigonometria para o vestibular do IME, podemos dizer que na última década, pelo menos 12 questões abordavam prioritariamente trigonometria. Isto sem levar em conta aquelas que podiam apresentar também resolução trigonométrica (como por exemplo, algumas questões de geometria plana). Para exemplificar uma destas questões, abaixo segue um exemplo de 2005

QUESTÃO: *Resolva a equação 2 sen 11 x + cos 3x +* $\sqrt{3}$ *sen 3 x = 0.*

SOLUÇÃO:

2sen 11x + cos 3x + $\sqrt{3}$ sen 3x = 0, dividimos ambos os termos por 2

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2}.sen\ 11x+\frac{1}{2}.\cos 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}.sen\ 3x=0$$

$$\Leftrightarrow sen\ 11x+(sen\frac{\pi}{6}.\cos 3x+sen\ 3x\ .\cos\frac{\pi}{6})=0$$

$$\Leftrightarrow sen\ 11x+sen(\frac{\pi}{6}+3x)=0$$

Sabemos que: sen p + sen q = $2.sen(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$, logo:

$$\Leftrightarrow 2.sen\left(\frac{11x+3x+\pi/6}{2}\right).\cos\left(\frac{11x-3x-\pi/6}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2.sen\left(7x+\frac{\pi}{12}\right).\cos\left(4x-\frac{\pi}{12}\right)=0$$

Logo, temos duas situações para a igualdade ser satisfeita:

a) $sen\left(7x+\frac{\pi}{12}\right)=0\Leftrightarrow 7x+\frac{\pi}{12}=\pi+k\cdot\pi\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{84}+k\cdot\frac{\pi}{7}$

ou

b) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{12}\right)=0\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{48}+k\cdot\frac{\pi}{4}$

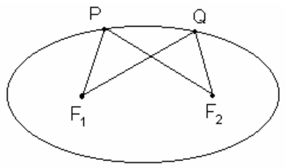
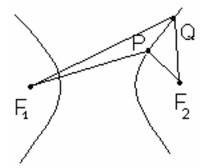
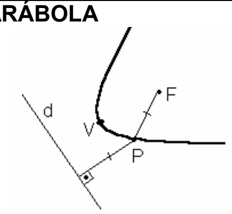
CÔNICAS

O tópico de cônicas normalmente não é enfatizado no ensino médio. Isto ocorre primeiramente por sua complexidade e pela pouca incidência em vestibulares deste assunto. Entretanto, no vestibular do IME, temos 7 questões na última década de vestibulares que abordam este assunto:

1997 – PARÁBOLA
1998 – ELÍPSE e HIPÉRBOLE e PARÁBOLA
2000 – ELÍPSE e HIPÉRBOLE
2002 – PARÁBOLA
2004 – PARÁBOLA
2005 – ELÍPSE
2006 – HIPÉRBOLE

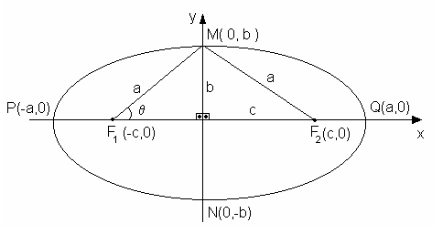
Assim, é importante para o candidato estar preparado para resolver questões a respeito deste assunto no vestibular de 2007, pois a probabilidade dele ser novamente cobrado é alta. A seguir um resumo das principais propriedades das cônicas:

DEFINIÇÕES

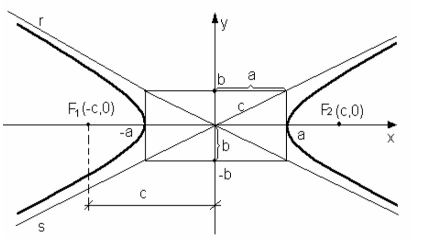
ELIPSE 	Dados dos pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma elipse de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante 2a, com 2a > 2c.
HIPÉRBOLE 	Dados dos pontos F_1 e F_2 distantes 2c. Uma hipérbole de focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é constante 2a, com 2a < 2c.
PARÁBOLA 	Dados um ponto F e uma reta d ($F \notin d$) e p a distância entre eles. Parábola é o conjunto dos pontos do plano eqüidistantes de F e d.

Elementos principais:

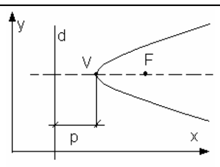
ELIPSE

	F_1 e F_2 → focos O → centro A_1A_2 → eixo maior (2a) B_1B_2 → eixo menor (2b) 2c → distância focal c/a → excentricidade

HIPÉRBOLE

	F_1 e F_2 → focos O → centro A_1A_2 → eixo real (2a) B_1B_2 → eixo conjugado ou transverso (2b) 2c → distância focal c/a → excentricidade

PARÁBOLA

	F → foco d → diretriz 2p → parâmetro V → vértice

Relações notáveis:

ELIPSE	HIPÉRBOLE	PARÁBOLA
$a^2 = b^2 + c^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$d(\overline{VF}) = p$

Equações Reduzidas

ELIPSE	
Focos em Ox (-c,0) e (c,0)	Focos em Oy (0,-c) e (0,c)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
HIPÉRBOLE	
Focos em Ox (-c,0) e (c,0)	Focos em Oy (0,-c) e (0,c)
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
PARÁBOLA	
Foco em Ox (p,0)	Foco em Oy (0,p)
$y^2 = 4px$	$x^2 = 4py$

Equações Reduzidas – centro em (x_o,y_o)

ELIPSE	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
HIPÉRBOLE	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$
PARÁBOLA - Equação Reduzida – vértice em (x_o,y_o)	
$(y – y_0)^2 = 4p.(x – x_0)$	$(x – x_0)^2 = 4p.(y – y_0)$

RECONHECIMENTO DE UMA CÔNICA

Dada uma equação do 2º grau redutível à forma $\frac{(x-x_0)^2}{k_1}+\frac{(y-y_0)^2}{k_2}=1$	
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1>k_2$	elipse de eixo maior horizontal
$k_1>0$, $k_2>0$ e $k_1<k_2$	elipse de eixo maior vertical
$k_1>0$ e $k_2<0$	hipérbole de eixo real horizontal
$k_1<0$ e $k_2>0$	hipérbole de eixo real vertical’

Parábolas - $p = 1/4|a|$

$y = ax^2 + bx + c$ diretriz horizontal	$x = ay^2 + by + c$ diretriz vertical
$x_v = \frac{-b}{2a}$ **e** $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$	$x_v = \frac{-\Delta}{4a}$ **e** $y_v = \frac{-b}{2a}$
a > 0 → conc. p/ cima a < 0 → conc. p/ baixo	a > 0 → conc. p/ direita a < 0 → conc. p/ esquerda

Rotação de eixos

As coordenadas de um ponto P(x,y) após a rotação de eixos de um ângulo θ são dadas por (x`,y`) tais que	
$x = x`.\cos\theta - y`.\text{sen}\theta$	**$y = x`.\text{sen}\theta + y`.\cos\theta$**

Interpretação de uma equação do 2º grau

Dada a eq. geral do 2º grau: **$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$** é sempre possível eliminar o seu termo retângulo (2Bxy) através de um rotação de eixos de um ângulo θ tal que	
A = C → $\theta = \pi / 4$	**A ≠ C → $tg\ 2\theta = 2B/ (A – C)$**

IME 1998 – UM EXEMPLO DE CÔNICAS

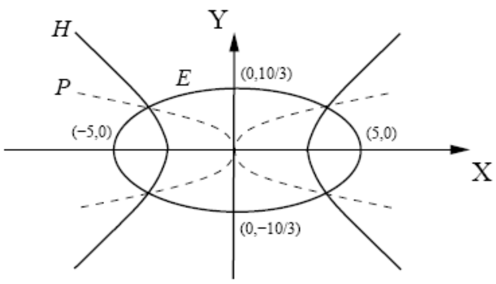
Em 1998 foi cobrada uma questão bastante interessante a respeito deste tópico pouco enfatizado no ensino médio. Ele relaciona parábola, hipérbole e elipse, necessitando um certo traquejo matemático nestas três cônicas:

QUESTÃO: *Considere uma elipse e uma hipérbole centradas na origem, O, de um sistema cartesiano, com eixo focal coincidente com o eixo OX. Os focos da elipse são vértices da hipérbole e os focos da hipérbole são vértices da elipse.*

Dados os eixos da elipse como 10 cm e $\frac{20}{3}$ *cm, determine as equações das parábolas, que passam pelas interseções da elipse e da hipérbole e são tangentes ao eixo OY na origem.*

SOLUÇÃO:

Do enunciado temos:



I) Para a elipse

Temos a = 5; b = $\frac{10}{3}$ e portanto a equação da elipse é: $\frac{x^2}{25}+\frac{9y^2}{100}=1$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $c^2 = 25 - \frac{100}{9} \Rightarrow c_{elipse} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

Note que temos $c_{elipse} = a_{hipérbole}$

II) Para a hipérbole

Temos a = $\frac{5\sqrt{5}}{3}$; c = 5

Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $b^2 = 25 - \frac{125}{9} \Rightarrow b = \frac{10}{3}$

Assim, a equação da hipérbole é: $\frac{9x^2}{125}-\frac{9y^2}{100}=1$

Pontos de interseção das Cônicas

Somando as equações das cônicas:

$$\begin{cases} E: \frac{x^2}{25}+\cancel{\frac{9y^2}{100}}=1 \\ H: \frac{9x^2}{125}-\cancel{\frac{9y^2}{100}}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{14x^2}{125}=2 \Rightarrow x^2=\frac{125}{7} \Rightarrow y^2=\frac{200}{63}$$

As parábolas tangentes ao eixo OY, têm equações da forma:

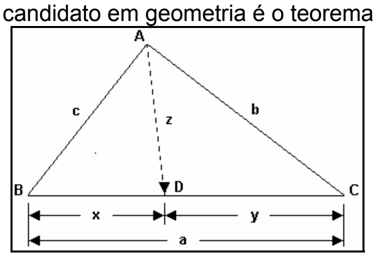
$$y^2 = 4px$$

Logo: $\frac{200}{63}=4p\left(\pm\sqrt{\frac{125}{7}}\right) \Rightarrow 4p=\pm\sqrt{\frac{7}{125}}\cdot\frac{200}{63} \Rightarrow 4p=\pm\frac{8\sqrt{35}}{63}$

Assim, a equação das parábolas são dadas por: $P: y^2=\pm\frac{8\sqrt{35}}{63}x$

GEOMETRIA – A RELAÇÃO DE STEWART

Um teorema bastante importante, que pode facilitar a vida do candidato em geometria é o teorema de Stewart:



$$b^2x + c^2y - z^2a = a.x.y$$

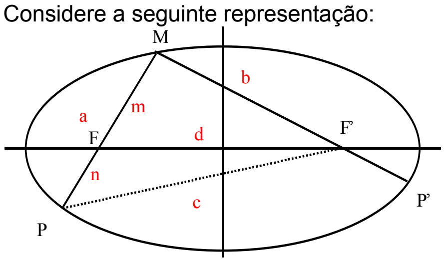
IME 2005 – UM EXEMPLO DE APLICAÇÃO DE STEWART

QUESTÃO: *Considere uma elipse de focos F e F', e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por M duas secantes* $\overline{MF}$ *e* $\overline{MF'}$*, e que interceptam a elipse em P e P', respectivamente. Demonstre que a soma (*$\overline{MF}/\overline{FP}$*) + (*$\overline{MF'}/\overline{F'P'}$*) é constante.*

Sugestão: Calcule inicialmente a soma (1/$\overline{MF}$*) + (1/*$\overline{FP}$*).*

SOLUÇÃO:

Considere a seguinte representação:



Considere
eixo maior da elipse: $2a_e$
eixo menor da elipse: $2b_e$
distancia entre focos: $2c_e$

Para visualizarmos a Relação de Stewart no triângulo MPF', temos:

MP = a = m + n	FF' = d = $2c_f$
MF = m	MF' = b
FP = n	PF' = c

Daí, pela Relação de Stewart, temos:

$$m.c^2 + n.b^2 - a.d^2 = a.m.n$$

Das propriedades da elipse, temos:

A) b + m = c + n = $2a_e$ (soma das distâncias de um ponto aos focos constante) $\Rightarrow b = 2a_e - m$ e $c = k - n$

B) $d = 2c_e$

Substituindo na relação de Stewart:

$m.(2a_e - n)^2 + n.(2a_e - m)^2 = (m + n).4c_e^2 + (m + n).m.n$

$\Rightarrow m.(4a_e^2 - 4a_en + n^2) + n.(4a_e^2 - 4a_em + m^2) = (m+n).4c_e^2 + (m+n).m.n$

$\Rightarrow (m + n).4a_e^2 - 8a_emn + \cancel{(m+n).m.n} = (m + n).4c_e^2 + \cancel{(m+n).m.n}$

$\Rightarrow (m + n).(4a_e^2 - 4c_e^2) = 8a_emn$

$$\Rightarrow \frac{m+n}{m\cdot n}=\frac{8a_e}{4a_e^2-4c_e^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{8a_e}{4a_e^2-4c_e^2}$$

Lembrando que $a_e^2 = b_e^2 + c_e^2$, temos $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2a_e}{b_e^2}$ que é constante.

Assim, tomando-se $\frac{2a_e}{b_e^2}=K$ = constante, vem:

$\frac{1}{PF}+\frac{1}{MF}=K$ (I); analogamente, $\frac{1}{PF'}+\frac{1}{MF'}=K$ (II)

Multiplicando (I) por MF e (II) por MF', chega-se a:

$\frac{MF}{PF}+1=K\cdot MF$ (III) e $\frac{MF'}{PF'}+1=K\cdot MF'$ (IV)

De (III) + (IV) tem–se:

$$2+\frac{MF}{PF}+\frac{MF'}{PF'}=K\cdot\left(MF+MF'\right)$$

Da propriedade da elipse (MF+ MF') = $2a_e$

$$\frac{MF}{PF}+\frac{MF'}{PF'}=K\cdot 2a_e-2 = C = \text{constante}$$

Observação: Cálculo da constante C:

$$C = 2a_e.K - 2 = 2a_e\cdot\frac{2a_e}{b_e^2} - 2 = \frac{4a_e^2-2b_e^2}{b_e^2} = \frac{2\left(a_e^2+c_e^2\right)}{b_e^2}$$

OBSERVAÇÃO FINAL

Como observação final, gostaríamos de deixar bem claro que, em qualquer exercício de Matemática, a argumentação é fundamental, principalmente em exercícios que envolvem demonstrações. Não basta apenas chegar a um resultado, também é necessário especificar o modo como esse resultado foi obtido.