Gabarito IME 2006 – Objetivas
MATEMATICA

1. Sabemos, das propriedades dos complexos que a soma dos conjugados de dois complexos é o conjugado da soma dos mesmos 2 complexos. Assim, da 2ª equação:

$$\bar{z} - \bar{w} = \mathbf{2} + \mathbf{4}i \quad \Rightarrow \overline{z - w} = \mathbf{2} + \mathbf{4}i \quad \Rightarrow z - w = \mathbf{2} - \mathbf{4}i$$

Da 1ª equação:

$$w^2 - z^2 = (w - z)(w + z) = -\underbrace{(z - w)}_{\mathbf{2}-\mathbf{4}i}.(w + z) = \mathbf{4} + \mathbf{12}i$$

Assim:

$$(w + z) = \frac{\mathbf{4} + \mathbf{12}i}{\mathbf{4}i - \mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2} + \mathbf{6}i}{\mathbf{2}i - \mathbf{1}}$$

$$= \frac{\mathbf{2} + \mathbf{6}i}{\mathbf{2}i - \mathbf{1}}.\frac{(-\mathbf{2}i - \mathbf{1})}{(-\mathbf{2}i - \mathbf{1})} = \frac{\mathbf{10} - \mathbf{10}i}{\mathbf{5}} = \mathbf{2} - \mathbf{2}i$$

Resposta: Opção (D)

---

2. Do enunciado:

$P = 10.N + 1$

$Q = 10^5 + N$

$P = 3.Q$

Logo:

$10N + 1 = 3.\ 10^5 + 3N$

Segue que: $7N = 3.\ 10^5 - 1$, e com isso $N = 42857$

Resposta: Opção (E)

3. Na n-esima etapa, o perímetro do quadrado hachurado vale: $4.\frac{1}{2^{n-1}}$

$$S = 4 + 4.\frac{1}{2} + 4.\frac{1}{2^2} + ... = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$$

Resposta: Opção (C)

---

4. $r_1, r_2 \in R$ **e** $r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \Delta = 0 \quad \Rightarrow p^2 - 32 > 0 \quad \Rightarrow |p| > 4\sqrt{2}$

Da relação de Girard:

$r_1 + r_2 = -p \quad \Rightarrow |r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$

Resposta: Opção (A)

---

5. Para que haja uma solução, o determinante da matriz incompleta deve ser não nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \therefore \quad -a + 15 - 4 + 10 + 3 - 2a \neq 0 \qquad \therefore \quad a \neq 8$$

Resposta: Opção (C)

---

6. Do enunciado:

$$\begin{cases} f(4)=5 \\ f(x+4)=f(x).f(4) \end{cases} \quad \Rightarrow f(x+4)=5.f(x)$$

Como o domínio de f é o conjunto dos Reais, fazendo x = 0:

$$\Rightarrow f(0+4)=5.f(0) \quad \Rightarrow f(0)=1$$

Fazendo x = -4 : $f(-4+4)=5.f(-4) \quad \Rightarrow f(-4)=\dfrac{1}{5}$

Resposta: Opção (D)

7. Se não tivéssemos restrição dos dois irmãos não poderem ficar na mesma equipe: $\dfrac{9!}{2!3!4!}=1260$

Se ambos irmãos estiverem no grupo de 2: $\dfrac{7!}{3!4!}=35$

Se ambos irmãos estiverem no grupo de 3: $\dfrac{7!}{2!1!4!}=105$

Se ambos irmãos estiverem no grupo de 4: $\dfrac{7!}{2!3!2!}=210$

Do principio da inclusão- exclusão, o número de equipes é 1260-35-105-210= 910

Resposta: Opção (D)

8. Sendo x o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, da Lei dos senos no triângulo: $\frac{p}{\text{sen}} = \frac{q}{\text{sen}\hat{Q}} = \frac{r}{\text{sen}\hat{R}} = \mathbf{2}x$

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ p & q & r \\ \text{sen}\hat{P} & \text{sen}\hat{Q} & \text{sen}\hat{R} \end{bmatrix} \underset{\text{Lei dos Senos}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2}x.\text{sen}\hat{P} & \mathbf{2}x.\text{sen}\hat{Q} & \mathbf{2}x.\text{sen}\hat{R} \\ \text{sen}\hat{P} & \text{sen}\hat{Q} & \text{sen}\hat{R} \end{bmatrix}$$

Note que as 2ª e 3ª linhas são proporcionais, logo D = 0.

Resposta: Opção (B)

9. Das opções:

a) $\log \mathbf{4}^{\mathbf{30}} = \log \mathbf{2}^{\mathbf{60}} = \mathbf{60}.\log \mathbf{2} = \mathbf{60.0,301} = \mathbf{18,06}$

b) $\log \mathbf{9}^{\mathbf{24}} = \log \mathbf{3}^{\mathbf{48}} = \mathbf{48}.\log \mathbf{3} = \mathbf{48.0,4771} = \mathbf{22,9008}$

c) $\log \mathbf{25}^{\mathbf{40}} = \log \mathbf{5}^{\mathbf{80}} = \mathbf{80}.\log \mathbf{5} = \mathbf{80.0,6989} = \mathbf{55,912}$

d) $\log \mathbf{81}^{\mathbf{20}} = \log \mathbf{3}^{\mathbf{80}} = \mathbf{80}.\log \mathbf{3} = \mathbf{80.0,301} = \mathbf{38,168}$

e) $\log \mathbf{625}^{\mathbf{15}} = \log \mathbf{5}^{\mathbf{60}} = \mathbf{60}.\log \mathbf{5} = \mathbf{60.0,6989} = \mathbf{41,934}$

O menor resultado é 18,06

Resposta: Opção (A)

10. $f(x,y) = x + y$

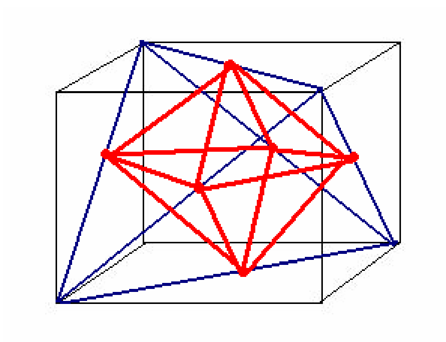
$f(1,2) = 3$
$f(2,3) = 5$ $\Rightarrow$ $\forall\ (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2) \in A$
$f(1,3) = 4$ $\quad f(x_1,y_1) \neq f(x_2,y_2) \in A$

f é <u>injetora</u>

Como não existe $(x,y) \in A$ tal que $f(x,y) = 1$ e $1 \in B$, temos que f não é sobrejetora.

Resposta: Opção (A)

11.



As arestas em vermelho são as arestas do octaedro pedido. O volume do octaedro é dado $V_1 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$, sendo "a" a aresta do octaedro. Mas a aresta do octaedro é ½ da aresta do tetraedro inscrito no cubo. O volume do tetraedro, em função de sua aresta, é

$$V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

$\Rightarrow$ $a = \frac{1}{2}\,l$, logo, $V_1 = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{24}$

$\Rightarrow$ $V_1 = V/2$

Resposta: Opção (A)

---

12. Raízes: r-2 , r , r+2

P(x) = a(x - (r - 2))(x - r)(x- (r + 2))
P(0) = a(2 - r)(-r)(-r - 2) = a(2 – r)r(r + 2) = 0 (I)
P(1) = a(3 - r)(1 - r)(-r - 1) = a(3 – r)(r – 1)(r + 1) = 1 (II)
P(-1) = a(1 - r)(-1 - r)(-r + 3) = a(1 – r)(r + 1)(r + 3) = -1 (III)

$$\frac{(III)}{(II)} = -1 = \frac{(\mathbf{1}-r)(r+\mathbf{1})(r+\mathbf{3})}{(\mathbf{3}-r)(r-\mathbf{1})(r+\mathbf{1})} \Rightarrow \frac{r+\mathbf{3}}{\mathbf{3}-r} = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}r = \mathbf{0} \Rightarrow r = \mathbf{0}$$

$\Rightarrow$ a(3)(-1)(1) = 1 $\Rightarrow$ a = -1/3

Resposta: Opção (D)

---

13. $P(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

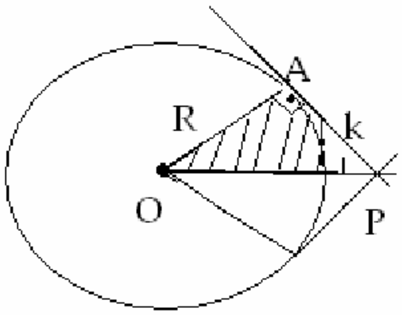
$b = -\sum r_i \quad (impar) \quad (4 \quad pares, 1 \quad impar)$

$$\left.\begin{array}{ll} c = \sum r_i.r_j & (par) \\ d = -\sum r_i.r_j.r_k & (par) \\ e = \sum r_i.r_j.r_k.r_l & (par) \\ f = -r_1.r_2.r_3.r_4.r_5 & (par) \end{array}\right\} \quad (Como \quad so' \quad ha' \quad 1 \quad raiz \quad impar, \quad todos \quad termos \quad sao \quad pares)$$

Logo, temos 4 termos pares.

Resposta: Opção (E)

14.



Do triângulo hachurado

$R^2 + k^2 = PO^2$

$\Rightarrow PO = c^{\underline{te}} = \sqrt{R^2 + k^2}$

Resposta: Opção (B)

15. O avô tinha x anos no ano x^2, logo ele nasceu no ano $x^2 - x$.

$$Para \quad x = 43 \quad \Rightarrow x^2 - x = 1806$$
$$Para \quad x = 44 \quad \Rightarrow x^2 - x = 1892$$
$$Para \quad x = 45 \quad \Rightarrow x^2 - x = 1980$$

Como esse ano tem de ser 30 anos antes de um ano do século XX, o único valor é 1892.

Resposta: Opção (A)