

Gabarito IME 2006 – Matemática

Questão 1

Elevar uma matriz diagonal a uma potência é trivial, uma vez que das multiplicações de matrizes sucessivas, o resultado virá de apenas elevar os termos da diagonal principal à potencia desejada:

$$B^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

Mas, do enunciado:

$$\begin{aligned} B^n &= \underbrace{(P^{-1} \cdot A \cdot P)(P \cdot P^{-1}) \dots (P^{-1} \cdot A \cdot P)}_{n \text{ vezes}} = P^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{(P \cdot P^{-1})}_I \cdot A \cdot \underbrace{(P \cdot P^{-1})}_I \dots A \cdot P \\ &= P^{-1} \cdot \underbrace{A \cdot A \dots A}_{n \text{ vezes}} \cdot P = P^{-1} \cdot A^n \cdot P \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \det(B^n) &= \det(P^{-1} \cdot A^n \cdot P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A^n) \cdot \det(P) \\ &= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A^n) \cdot \det(P) = \det(A^n) \end{aligned}$$

Com isso: $\det(A^n) = \det(B^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Resposta:

$$\det(A^n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

OBS: Não entendemos o que a banca quis com essa questão. Fizemos o gabarito, fugindo do óbvio, para ver talvez uma solução que a banca quisesse. A solução mais óbvia seria usar o teorema de Binet, direto na matriz A, e utilizar que

$$\det(A^n) = (\det A)^n = \frac{1}{2^n}$$

Questão 2

Do enunciado:

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot a_k \cdot b_k$$

$$A(k+1) = \frac{1}{2} \cdot a_{k+1} \cdot b_{k+1} = \frac{4}{15} \cdot a_k \cdot b_k = \frac{8}{15} A(k)$$

Temos também:

$$A(1) = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 42 = 630$$

Assim, a soma de todas as áreas de todos os triângulos, com k tendendo a infinito:

$$\lim \sum A(k) = \frac{A(1)}{1 - \frac{A(k+1)}{A(k)}} = \frac{630}{1 - \frac{8}{15}} = 1350$$

Resposta: 1350 u.a.

Questão 3

Usando propriedades de troca de base de logaritmos:

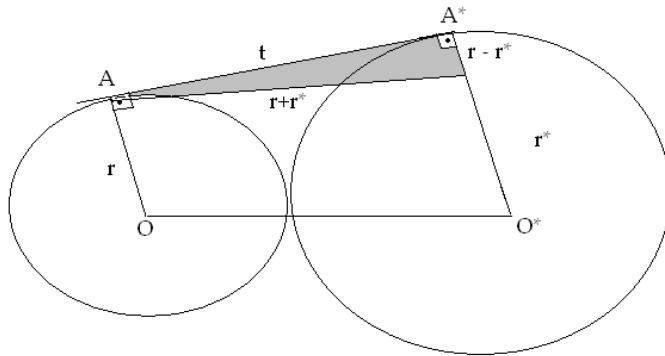
$$\begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \log_9 \beta = 10 \\ \log_9 \alpha - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \frac{\log_3 \beta}{\log_3 9} = 10 \\ \frac{\log_3 \alpha}{\log_3 9} - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 \log_3 \alpha + \frac{\log_3 \beta}{2} = 10 \\ \frac{\log_3 \alpha}{2} - 2 \log_3 \beta = 10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 6 \log_3 \alpha + \log_3 \beta = 20 \\ \log_3 \alpha - 4 \log_3 \beta = 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_3 \alpha = 4 \\ \log_3 \beta = -4 \end{cases} \rightarrow \log_3 \alpha + \log_3 \beta = 0 \rightarrow \log_3 \alpha \beta = 0 \rightarrow$$

$$P = \alpha \beta = 1$$

$P = \alpha \beta = 1$

Questão 4



O triângulo retângulo cuja hipotenusa é $(r + r^*)$ e os catetos são t e $(r - r^*)$ nos dá a seguinte relação (Pitágoras):

$$t^2 + (r - r^*)^2 = (r + r^*)^2$$

$$\therefore t^2 = 4.r.r^*$$

Daí, pelo teorema de Pappus-Gouldin: $S = 2\pi.r_m.t$

Onde r_m é a distância do centro de gravidade da reta tangente t (seu ponto médio) ao eixo OO^* .

Da figura:

$$r_m = \left(\frac{r+r^*}{2} \right) \cdot \cos \alpha, \quad \text{onde } \alpha \text{ é o ângulo entre o cateto } AA^* \text{ e a hipotenusa.}$$

$$S = 2\pi \cdot \left(\frac{r+r^*}{2} \right) \underbrace{\left(\frac{4.r.r^*}{r+r^*} \right)}_{\cos \alpha} \Rightarrow S = 4\pi.r.r^*$$

$$S = 4\pi.r.r^*$$

Questão 5

Observe que:

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2 = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x}_1 + \underbrace{2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x}_{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \operatorname{sen} 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, o conjunto solução será restrito apenas pelo universo de existência do logaritmo.

(i) $1 + \operatorname{sen} 2x > 0$, o que ocorre $\forall x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

(ii) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x > 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{cos} x \right)}_{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} > 0$

Para isso, devemos ter:

$$0 < x + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

(iii) $\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq \frac{\pi}{2}$

Da interseção das restrições (i), (ii) e (iii), e da restrição do enunciado

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \text{ teremos: } -\frac{\pi}{4} < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Resposta:

$$-\frac{\pi}{4} < x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Questão 6

Para existir o quadrilátero devemos ter que o ponto S não pode estar sobre o eixo OX.

Seja o ponto $R = (t, t + 1)$, e o ponto $S = (x, y)$. Do perpendicularismo, concluímos as relações:

$$\frac{x+2}{y} \cdot \frac{t+2}{t+1} = -1$$

$$\frac{x-1}{y} \cdot \frac{t-1}{t+1} = -1$$

Igualando as duas, temos:

$$(x+2)(t+2) = (x-1)(t-1) \Rightarrow tx + 2x + 2t + 4 = tx - x - t + 1$$

$$\Rightarrow t = -x - 1$$

Substituindo na segunda equação, encontramos:

$$\frac{x-1}{y} \cdot \frac{-x-2}{-x} = -1$$

$$(x-1)(x+2) = -xy$$

Logo, a equação procurada é: $xy + x^2 + x - 2 = 0$

Resposta:

$$xy + x^2 + x - 2 = 0 \quad x \neq 1$$

($B^2 - 4AC > 0$, gênero hipérbole)

EXTRA: Não foi pedido, mas podemos identificar a cônica hipérbole, utilizando uma rotação de eixos. (Veja Apêndice da Resolução).

Questão 7

Sabemos que $m = r_1 r_2$, logo m é inteiro. Para as raízes serem inteiras, por

Baskara $r_1, r_2 = \frac{-(m-15) \pm \sqrt{(m-15)^2 - 4m}}{2}$, o que implica $\sqrt{(m-15)^2 - 4m}$ ser inteiro.

Sendo q inteiro positivo

$$q = \sqrt{(m-15)^2 - 4m} \Rightarrow q^2 = m^2 - 30m + 225 - 4m = m^2 - 34m + 225 = (m-17)^2 - 64$$

$$\text{Logo } (m-17)^2 - q^2 = 64 \Rightarrow (m-17+q)(m-17-q) = 64$$

Os valores possíveis obtidos são

(lembrando que

$$m-17-q > m-17-q):$$

$$\begin{cases} m-17-q=2 \\ m-17+q=32 \end{cases} \Rightarrow m=34 \qquad \begin{cases} m-17-q=4 \\ m-17+q=16 \end{cases} \Rightarrow m=27$$

$$\begin{cases} m-17-q=8 \\ m-17+q=8 \end{cases} \Rightarrow m=25 \qquad \begin{cases} m-17-q=32 \\ m-17+q=2 \end{cases} \Rightarrow m=0$$

$$\begin{cases} m-17-q=16 \\ m-17+q=4 \end{cases} \Rightarrow m=7 \qquad \begin{cases} m-17-q=8 \\ m-17+q=8 \end{cases} \Rightarrow m=9$$

Conferindo na equação original, verificamos que todos os valores são válidos.

Resposta: $m = \{0, 7, 9, 25, 27, 34\}$

Questão 8

Notação: $\lfloor x \rfloor =$ Piso de $x =$ maior inteiro menor que x .

(i) Se $n+m$ é par:

Não há uma bola central, e como deve ser simétrico, a quantidade de bolas pretas e de bolas brancas deve ser igual nas duas metades. Logo m e n devem ser pares.

A segunda parte é simétrica à primeira, logo é definida pela primeira metade. A

primeira metade pode ser montada de $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}$ maneiras.

(ii) Se $n+m$ é ímpar:

Se m é ímpar, há uma bola preta central e $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ pretas e $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ brancas de cada

lado. Podemos montar de $\frac{\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2}\right)!}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor! \left(\frac{n}{2}\right)!}$ maneiras

Se n é ímpar, analogamente: $\frac{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \frac{m}{2}\right)!}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \left(\frac{m}{2}\right)!}$

Ou seja:

- Se n e m são ímpares 0

- Caso contrário $\frac{\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor!}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor!}$

Questão 9

Dividiremos a solução em dois casos:

- $a + b + c = 0$ (I)
- $a + b + c \neq 0$ (II)

Caso (I):

Por propriedades de razões e proporções:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} \Rightarrow \frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$$

Como: $a + b + c \neq 0 \rightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{b} = \frac{1}{a} \rightarrow a = b = c$

Logo: $\frac{a+b}{c} = \frac{a+a}{a} = 2$

Caso (II):

Se $(a + b + c) = 0 \rightarrow a + b = -c \Rightarrow \frac{a+b}{c} = -1$

Resposta: 2 ou -1

Questão 10

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=0}^n f(k) = 2008 \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)$$

Logo, temos que:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2005} f(k) = 2008 \cdot \left(\frac{2006}{2007} \right) \\ \sum_{k=0}^{2006} f(k) = 2008 \cdot \left(\frac{2007}{2008} \right) \end{cases}$$

Subtraindo, a 1ª equação da 2ª:

$$\begin{aligned} f(2006) &= 2008 \cdot \left(\frac{2007}{2008} - \frac{2006}{2007} \right) = \left(\frac{2007^2 - (2007-1) \cdot (2007+1)}{2007} \right) = \\ &= \left(\frac{2007^2 - (2007^2 - 1^2)}{2007} \right) = \frac{1}{2007} \end{aligned}$$

$$\text{Logo: } \frac{1}{f(2006)} = 2007$$

Resposta:

$$\frac{1}{f(2006)} = 2007$$

Apêndice

A equação encontrada na questão 6, para o lugar geométrico de S foi:

$$xy + x^2 + x - 2 = 0$$

Das equações de translação de eixos temos:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \therefore C = (0, -1)$$

Ou seja, a curva tem centro em $(0, -1)$ e com isso $F' = -2$.

Das propriedades de rotação, usaremos que: $\begin{cases} A' + C' = A + C \\ -4A'C' = B^2 - 4AC \end{cases}$ para obtermos

uma rotação que elimine o termo retangular da curva.

$$\begin{cases} A' + C' = 1 \\ A'C' = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ Logo, } A' \text{ e } C' \text{ são as raízes de: } \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

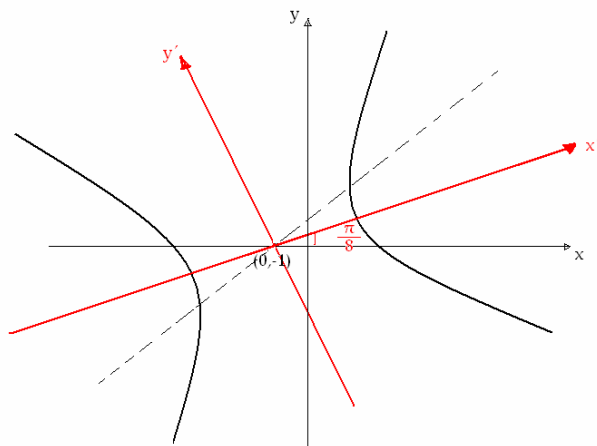
A curva após devidas rotação e translação é:

$$\boxed{\frac{x'^2}{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)} - \frac{y'^2}{\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)} = 1}$$

(Equação Reduzida da Hipérbole Rodada)

O ângulo de rotação θ é dado por:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A-C} = 1 \therefore \theta = \frac{\pi}{8}$$



Comentário da Prova

Nota-se nitidamente que o estilo da prova de matemática do IME mudou do ano passado para esse ano, sendo bem menos desafiadora comparada aos anos anteriores. Havia muitas questões com respostas simples e diretas, com pouco desenvolvimento algébrico, porém que requeriam atenção por parte do candidato a pequenos detalhes. Acreditamos que irá melhor o candidato que estiver mais atento (tendo vantagem até sobre os melhor preparados). Aguardamos (com esperança) que o nível das provas de física e de química nos dias seguintes não continue a nos desapontar.

Equipe Rumoaõita na Correção:

Alessandra Porto, Caio Guimaraes, Renato Lira, Rodolfo Ramos, Luiz Adolfo Schiller, Rafael Daigo, Rafael Marini, José Mario, Filipe Moreira